

УДК 004.04

Статистические компьютерные оценки характеристик многомерных операций и объектов. II.

Артеменко В.А., Андриюхин А.И., Филер З.Е.¹

Донецкий национальный технический университет

¹Кировоградский национальный педагогический университет,
alexandruckin@rambler.ru

Артеменко В.А., Андриюхин А.И., Филер З.Е. Компьютерные оценки характеристик многомерных операций и объектов. II. В работе рассматриваются известные классические многомерные объекты, такие как комплексные и гиперкомплексные числа, комплексные векторы и матрицы. Рассматриваются варианты построения скалярного отображения комплексных чисел. На базе этого отображения рассматриваются представления и свойства матриц. Приведены визуальные и стохастические оценки интервальных областей отображений для различных их параметров. Результаты работы, могут быть использованы при решении определенных вопросов построения устойчивых систем управления, теории интервального анализа и теории идентификация систем. При расчетах применялся пакет Wolfram Mathematica 11.2.

Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [1], однако в ней основное внимание уделяется известным классическим многомерным объектам, таким как комплексные и гиперкомплексные числа, комплексным векторам и матрицам и определению операций сравнения их.

Основой многомерных операций является введение операций сравнения комплексных чисел. Напомним, что на ранних этапах изучения комплексных чисел применение обычных логических рассуждений приводило к неправильным выводам.

Так известно, что И.Бернулли, Даламбер и Лейбниц имели ошибочное мнение о значении логарифма отрицательного числа [2]. Только Л.Эйлер дал правильный ответ. Формулы Эйлера (см.рис.1) и Муавра позволяют уверенно решать любые вопросы связанные с комплексными числами и подчеркнем, что известные соотношения $e^{2\pi i}=1$ (или $e^{\pi i}=-1$), $i^i=0.20788$, $i^{\pi}=0.00719188$, $i^{ie}=0.0139836$ получены при работе с операцией возведения чисел в комплексную степень, которая в сущности представляет собой многомерную операцию.

Постановка задачи

Формулировка задачи проста: необходимо построить скалярное отображение комплексных чисел, что даст возможность решать уравнения и неравенства с ними.

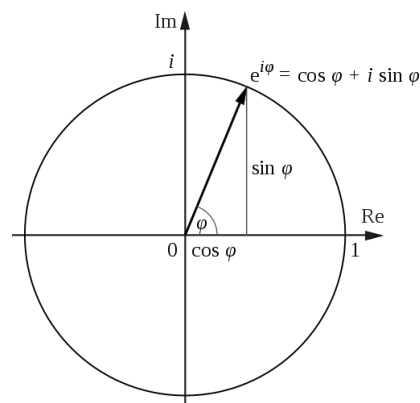


Рисунок 1 – Графическое представление комплексного нормированного числа

Необходимо подчеркнуть, что современные математические пакеты Wolfram Mathematica, Maple и другие, позволяют с помощью встроенных функций (модуль, аргумент, действительная и мнимая части комплексного числа) эффективно решать уравнения и неравенства с комплексными величинами.

К примеру, решение двух сотен уравнений для переменной M для заданных S, D при $n=2,200$, $i=1, n$ с выдачей зависимости $M(n)$

$$\sum_{i=1}^n i^{S+Di} = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^M$$

занимает время, меньшее 1 секунды для процессора I3 4170. График зависимости $M(n)$ представлен на рис.2 при $S=-1, D=2$.

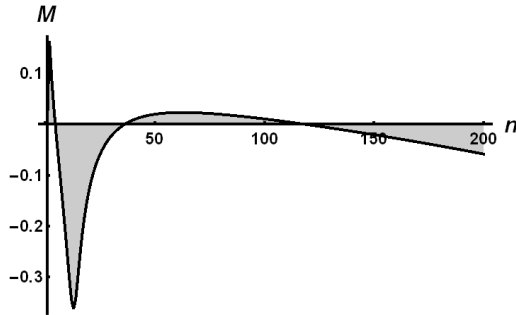


Рисунок 2 - Зависимость $M(n)$, $S=-1$, $D=2$

Несколько иной характер имеют результаты при $S=-1/2$ (гипотеза Римана), $D=2$ на рис.3.

Так как комплексное число является многомерной величиной (имеет две компоненты) возможно использовать методику решения известной в системном анализе проблемы оценки многокритериальных систем. Она состоит в выборе наилучшей системы из множества заданных систем $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, для которых заданы их оценки по критериям $K_1, K_2, \dots, K_m$.

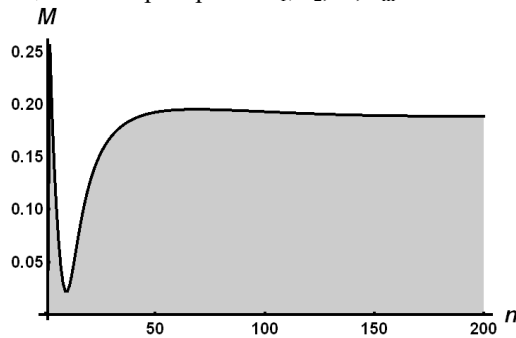


Рисунок 3 - Зависимость $M(n)$, $S=-1/2$, $D=2$

В таблице 1 элемент $X_{i,j}$ есть оценка объекта Q_i по критерию K_j .

Таблица 1 - Многокритериальные оценки систем

	K_1	...	K_j	...	K_m
Q_1					
...					
Q_i			$X_{i,j}$		
...					
Q_n					

Требуется определить «наилучший» объект. Согласно представлениям системного анализа мы должны построить интегральный критерий объекта (рассматриваемой системы).

Эти проблемы исследовались различными методами, важнейшими из которых являются:

1) методы, основанные на количественных измерениях, где:

а) методы, которые используют многокритериальную теорию полезности МАУТ [4-5];

б) методы, чьи результаты переводятся в количественный вид, использование метода аналитической иерархии (АНП) [6,7];

в) подходы использующие индикаторы при рассмотрении альтернатив в методах ELECTRE [8-9];

2) методы, основанные на качественных измерениях, при которых:

а) нет перехода к количественным переменным в вербальном анализе решений [10-13];

б) используют теорию нечетких множеств [14];

Обычно на практике используют мультиаддитивный интегральный критерий, и существует множество работ, в которых он описан [3].

Для применения мультиаддитивного интегрального критерия необходимо задавать приоритеты c_j для критериев K_j , $j=1, m$ и далее мы определяем «наилучший» объект согласно выражения $F = \max\{F_i, i=1, n\}$, $F_i = \{\sum c_j X_{i,j}, j=1, m\}$.

На рис.4-6 отображены представления выражения $(xi)^{yi}$ для действительных x, y для операции возведения чисел в комплексную степень.

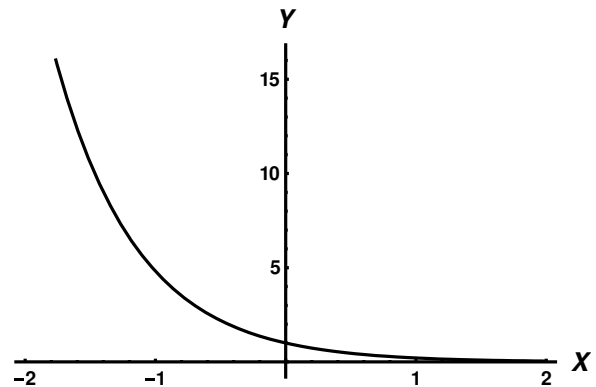


Рисунок 4 – График функции $Y=i^{xi}$

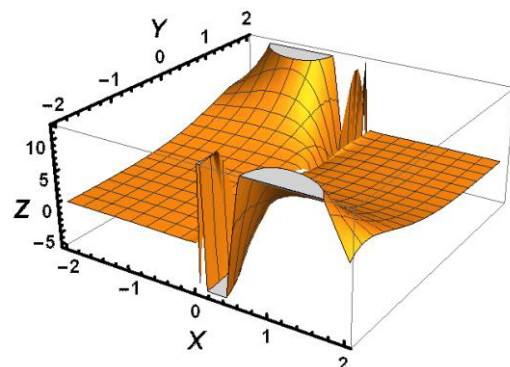


Рисунок 5 – График функции $Z=\text{Re}((xi)^{yi})$

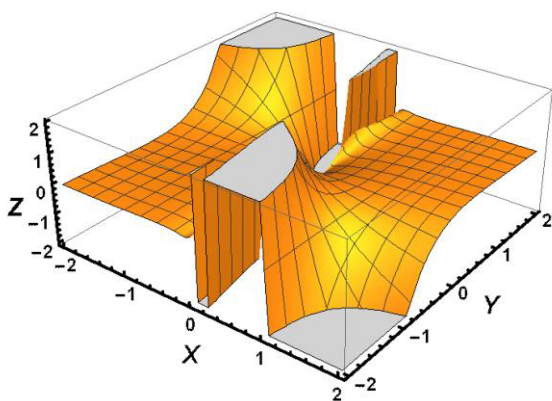


Рисунок 6 – График функции $Z = \text{Im}((xi)^{y_i})$

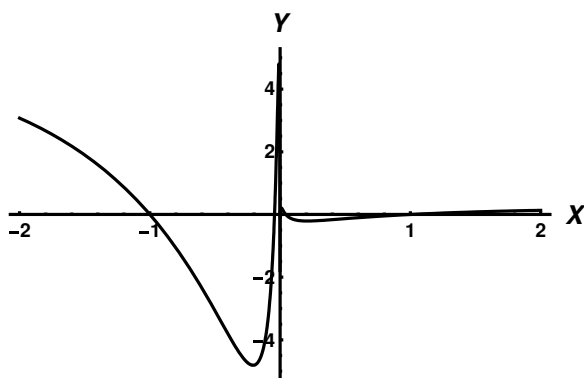


Рисунок 7 – График функции $Y = \text{Im}((xi)^i)$

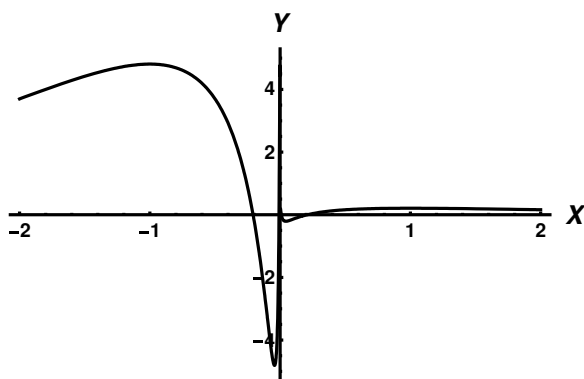


Рисунок 8 – График функции $Y = \text{Re}((xi)^i)$

Многомерные операции для комплексных чисел

При построении многомерной операции авторы вначале пытались построить многомерную операцию сравнения двух комплексных чисел основываясь на операции возведения их в некоторую степень.

Определим многомерную операцию сравнения двух комплексных чисел $(r_1, \phi_1), (r_2, \phi_2)$, где $r(\phi)$, модуль(аргумент) соответственно.

Здесь мы ввели обозначение $(r, \phi) = re^{i\phi}$ и далее определим преобразование T , как

$$T((r_1, \phi_1), (r_2, \phi_2)) = ((r_1, \phi_1)^P, (r_2, \phi_2)^P) \quad (1)$$

где показатель степени $P = 4\pi^2/(\phi_1\phi_2)$.

Компоненты вектора $((r_1, \phi_1)^P, ((r_2, \phi_2)^P)$ являются действительными числами, т.к. $(r_1, \phi_1)^P = ((r_1, \phi_1)^{P_1})^{P_2}$, где $P_1 = 2\pi/\phi_1$, $P_2 = 2\pi/\phi_2$ и следовательно $P_1 \cdot P_2 = 4\pi^2/(\phi_1\phi_2)$.

Выражение $(r_1, \phi_1)^{P_1} = r_1^{P_1} e^{iP_1\phi_1} = r_1^{P_1} e^{2\pi i} = r_1^{P_1}$ есть действительное число. Здесь мы использовали известное тождество $e^{2\pi i} = 1$.

Однако что практические расчеты при использовании этих преобразований показали, что это отображение обладает множеством недостатков:

1) имеем вычисления вида $2\pi/\phi$, т.е. особая точка при $\phi \rightarrow 0$;

2) комплексные числа, которые лежат на единичной комплексной окружности имеют одинаковую меру 1;

3) графические представления при использовании этого отображения имеют слишком сложный вид, не согласующийся с интуитивными представлениями.

Последнее обусловлено сложным поведением функций, представленных на рис.5-8.

Поиски привели к следующей формуле для отображения комплексного числа $(r, \phi) = re^{i\phi}$.

$$T(r, \phi) = r \sum_{i=1}^n \beta_i e^{g_i(\phi)} \quad (2)$$

Функция g должна удовлетворять основным условиям:

а) численные меры векторов комплексных чисел с одинаковым аргументом пропорциональны их модулям;

б) численные меры векторов комплексных чисел с одинаковым модулем, т.е. лежащих на комплексных окружностях одинакового радиуса, должны быть одинакового порядка.

Были построены численные меры для функций:

- 1) $g_1(r, \phi) = r \cdot \text{Exp}(\phi/(2\pi))$;
- 2) $g_2(r, \phi) = r \cdot \text{Exp}(-\phi/(2\pi))$;
- 3) $g_3(r, \phi) = r \cdot \text{Exp}(\cos(\phi)/(2\pi))$;
- 4) $g_4(r, \phi) = r \cdot \text{Exp}((-1/4\cos(-\phi) - 3/4\cos(\phi))/(2\pi))$;
- 5) $g_5(r, \phi) = r \cdot \text{Exp}((-3/4\cos(-\phi/2) - 1/4\cos(\phi/2))/(2\pi))$;
- 6) $g_6(r, \phi) = r \cdot \text{Exp}((-1/4\sin(-\phi) - 3/4\sin(\phi))/(2\pi))$;
- 7) $g_7(r, \phi) = r \cdot \text{Exp}((-1/4\sin(-\phi) - 3/4\sin(\phi))/(2\pi))$.

В табл.2 приведены основные характеристики приближений для этих зависимостей.

На рис.9-15 приведены графики функций $g_i(\phi)$, $i=1, 7$ для $r=1$,

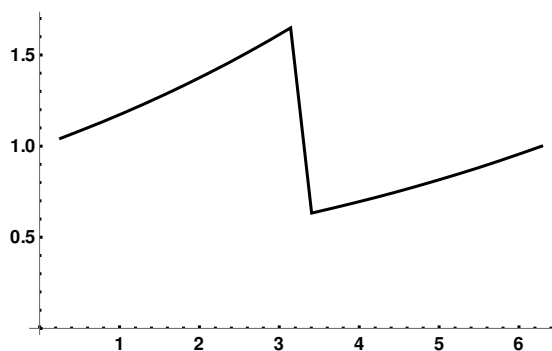


Рисунок 9 – График функции $g_1(\varphi)$

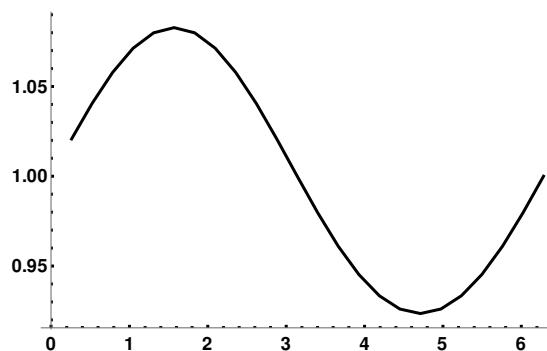


Рисунок 13 – График функции $g_5(\varphi)$

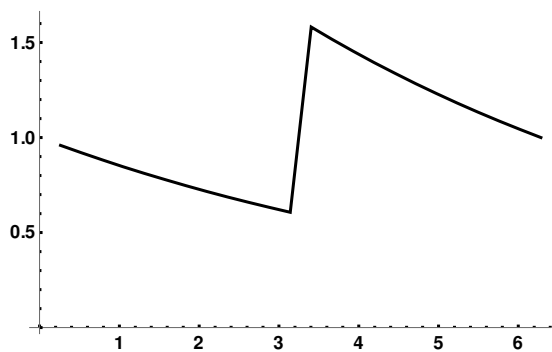


Рисунок 10 – График функции $g_2(\varphi)$

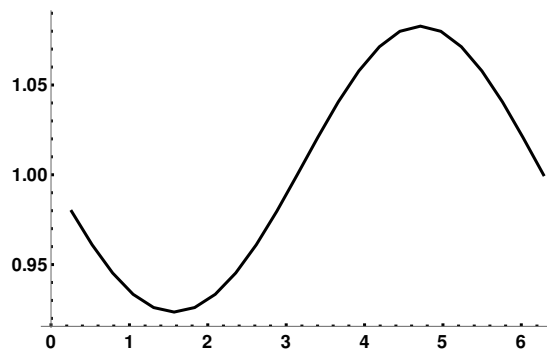


Рисунок 14 – График функции $g_6(\varphi)$

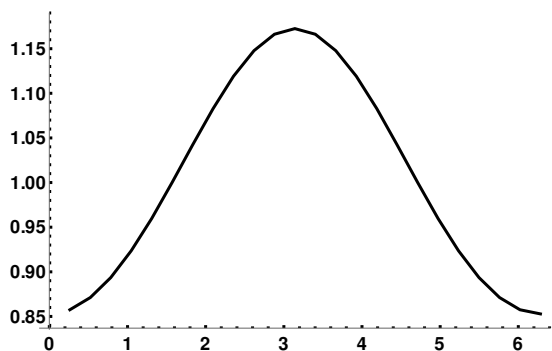


Рисунок 11 – График функции $g_3(\varphi)$

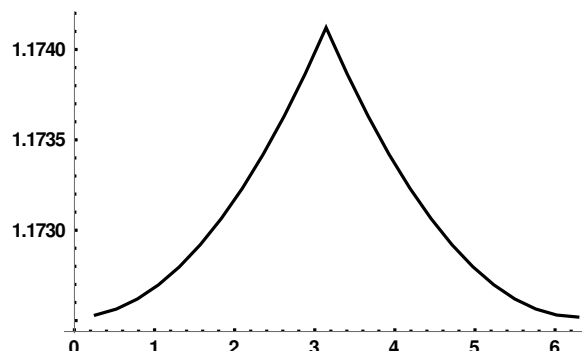


Рисунок 15 – График функции $g_7(\varphi)$

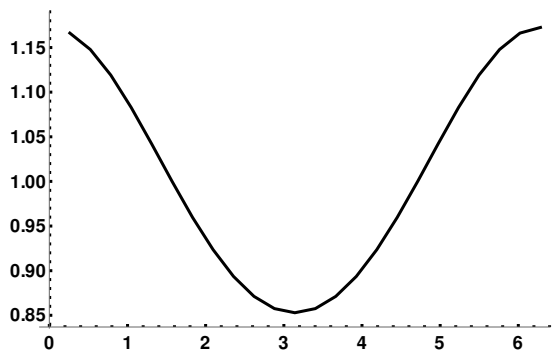


Рисунок 12 – График функции $g_4(\varphi)$

Таблица 2 - Характеристики приближений

№	Функция	Среднее	Сред.кв.отклонение
1	g_1	1.06405	0.2623
2	g_2	1.02063	0.25169
3	g_3	1.00634	0.10155
4	g_4	1.00634	0.10155
5	g_5	0.904881	0.0390529
6	g_6	1.00158	0.0505385
7	g_7	1.00158	0.0505385

Приведем примеры решения комплексных неравенств с использованием функций отображения $G_1(r, \varphi) = r \cdot \text{Exp}(\varphi/(2\pi))$, $G_2(r, \varphi) = r \cdot \text{Exp}(-\varphi/(2\pi))$, $G_3(r, \varphi) = r \cdot \text{Exp}(-\varphi/(4\pi))$. Введем обозначения $Z_1 = -1 + i$, $Z_2 = 3 + 2i$. На рис. 16-29 имеем результаты сравнения.

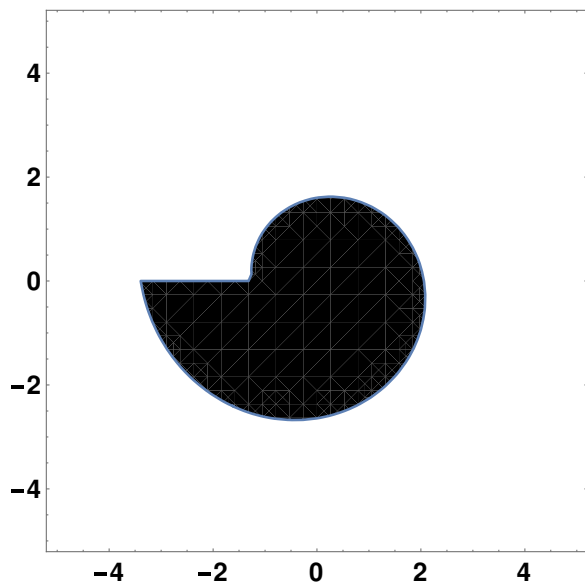


Рисунок 16 – Комплексные числа меньшие числа Z_1 для $G_1(r, \phi)$

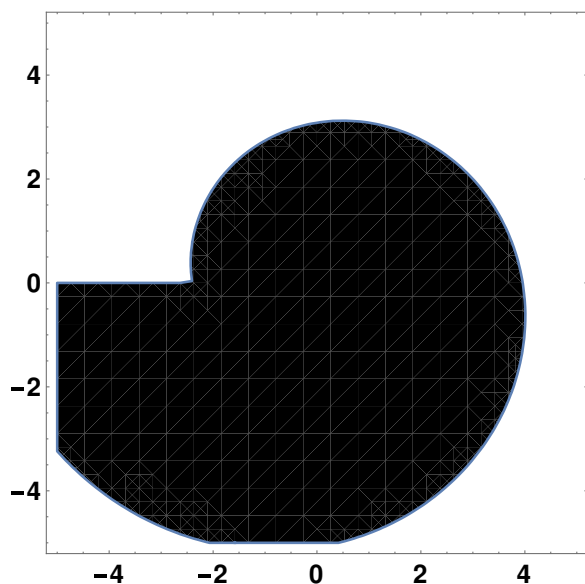


Рисунок 17 – Комплексные числа меньшие числа Z_2 для $G_1(r, \phi)$

Далее мы представим результаты сравнения комплексные числа в их отношениях по сравнению с числами Z_1 и Z_2 для $G_1(r, \phi)$.

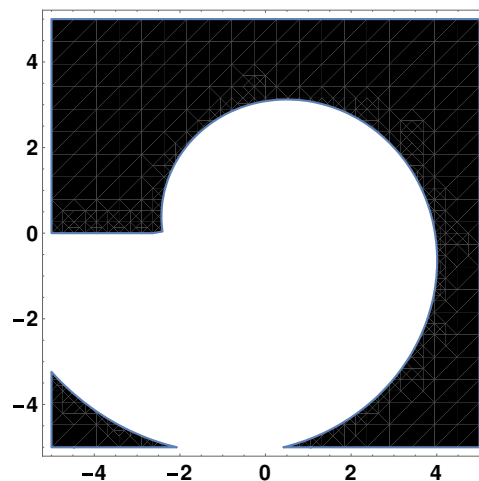


Рисунок 18 – Комплексные числа больше чем числа Z_2 и числа Z_1 для $G_1(\phi)$

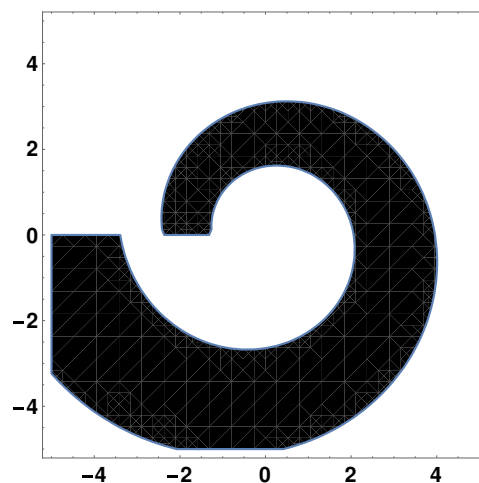


Рисунок 19 – Комплексные числа больше чем числа Z_1 и меньше, чем число Z_2 для $G_1(r, \phi)$

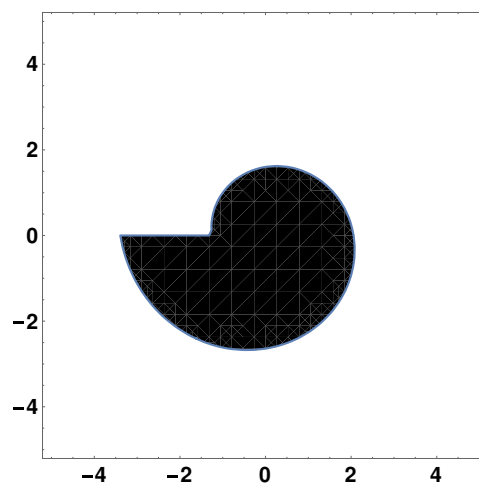


Рисунок 20 – Комплексные числа меньше чем числа Z_1 и меньше, чем число Z_2 для $G_1(r, \phi)$

Ясно, что комплексных числа больше чем число Z_2 и меньше, чем число Z_1 для $G_1(\phi)$ не существует и в целях экономии текста не помещаем пустой рисунок для этого варианта.. Для критерия $G_2(\phi)$ соответствующие области имеют следующий вид.

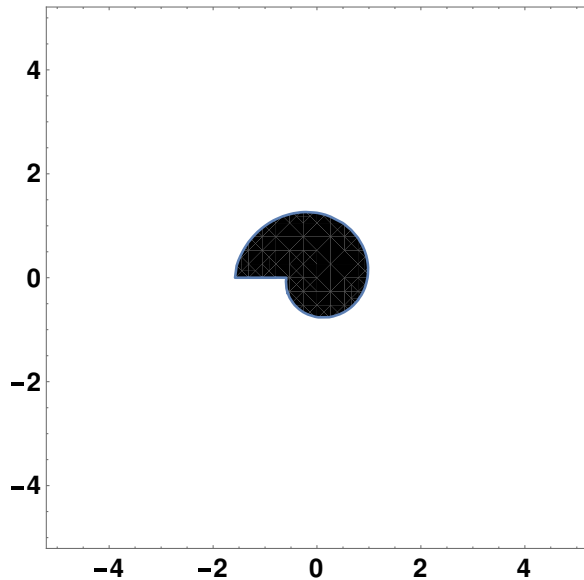


Рисунок 21 – Комплексные числа меньше числа Z_1 для $G_2(r, \phi)$

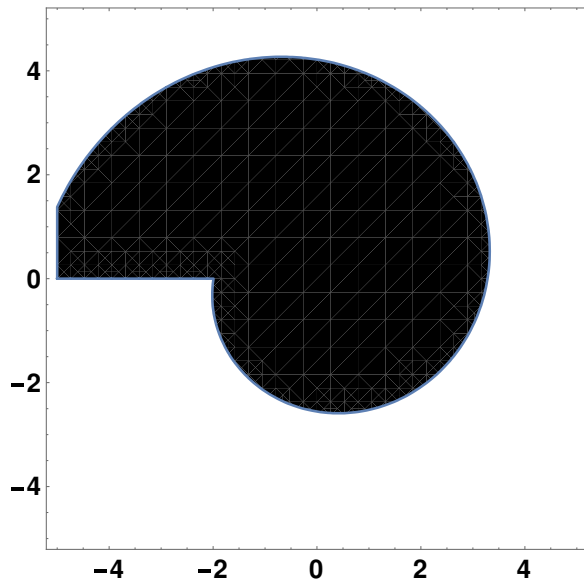


Рисунок 22 – Комплексные числа меньше числа Z_2 для $G_2(r, \phi)$

Аналогично в случае с критерием $G_1(\phi)$. мы представим комплексные числа в их отношениях по сравнению с числами Z_1 и Z_2 для $G_2(\phi)$.

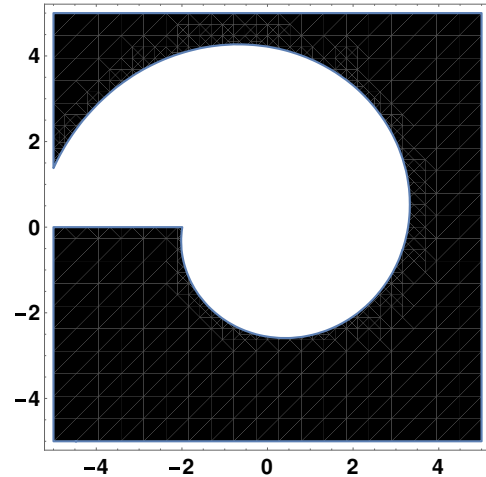


Рисунок 23 – Комплексные числа больше чем числа Z_2 и число Z_1 для $G_2(r, \phi)$

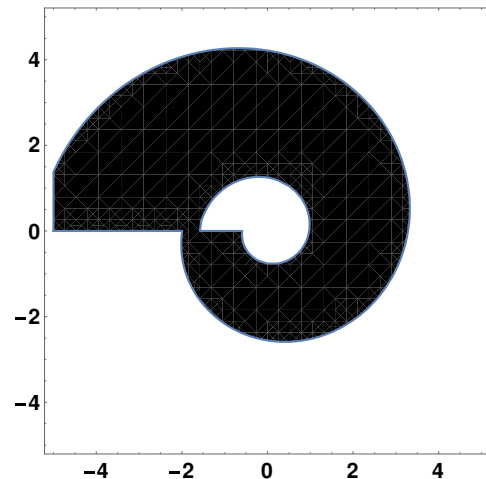


Рисунок 24 – Комплексные числа больше чем числа Z_1 и меньше, чем число Z_2 для $G_2(r, \phi)$

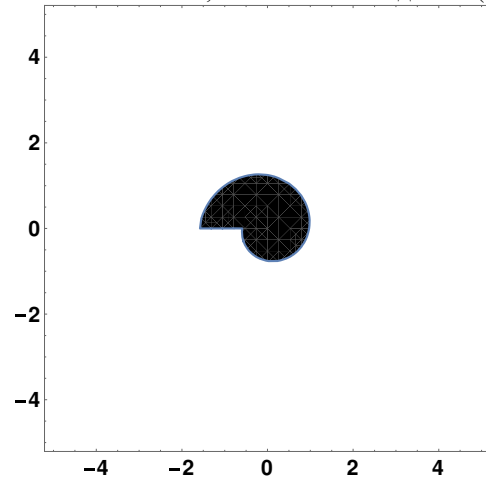


Рисунок 25 – Комплексные числа меньше чем числа Z_1 и меньше, чем число Z_2 для $G_2(r, \phi)$

Как и ранее пропускаем случай, когда комплексные числа больше чем числа Z_2 и меньше, чем число Z_1 для $G_2(\phi)$.

Ниже представлены области сравнения для $G3(\phi)$.

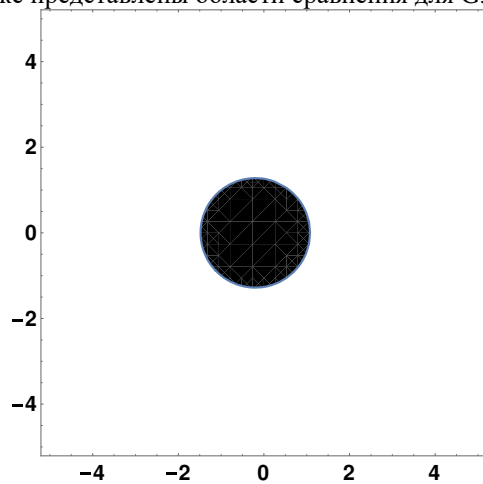


Рисунок 26 – Комплексные числа меньше числа $Z1$ для $G3(r, \phi)$

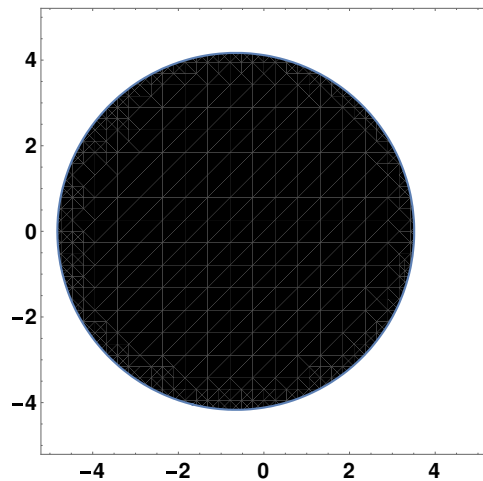


Рисунок 27 – Комплексные числа меньше числа $Z2$ для $G3(r, \phi)$

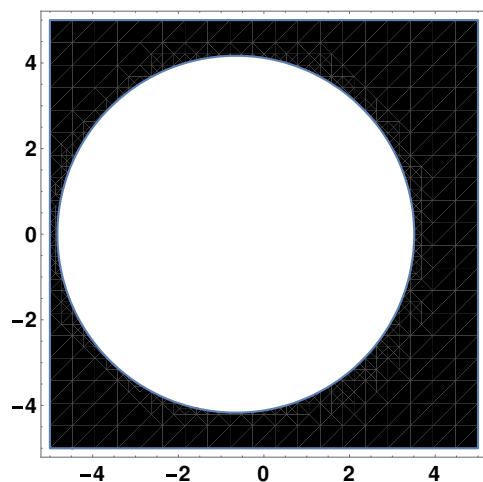


Рисунок 28 – Комплексные числа больше чем числа $Z2$ и число $Z1$ для $G3(r, \phi)$

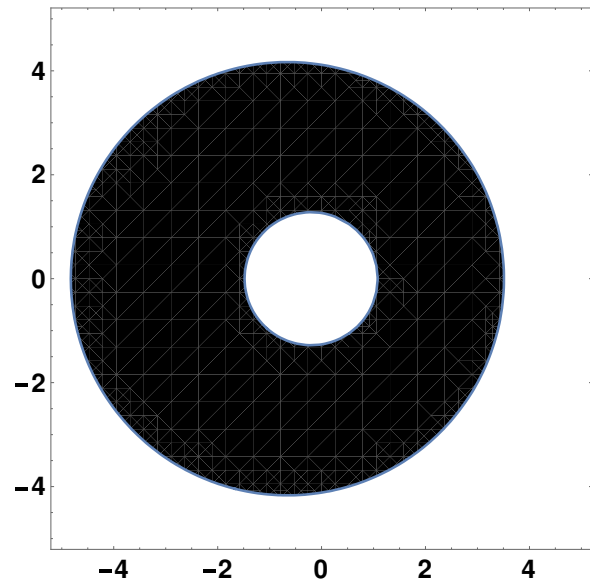


Рисунок 29 – Комплексные числа больше чем числа $Z1$ и меньше , чем число $Z2$ для $G3(r, \phi)$

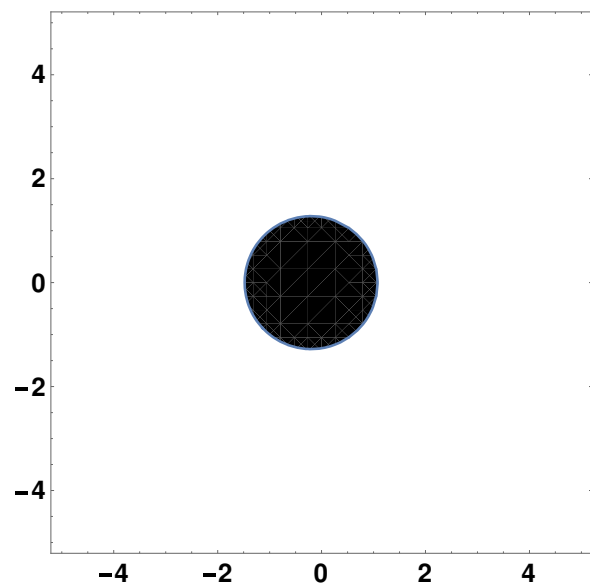


Рисунок 30 – Комплексные числа меньше чем числа $Z1$ и меньше , чем число $Z2$ для $G3(r, \phi)$

Опять пропускаем случай, когда комплексные числа больше чем числа $Z2$ и меньше, чем число $Z1$ для $G3(r, \phi)$.

Многомерные операции для комплексных матриц

Матрицы характеризуются своим спектром, т.е. множеством собственных чисел. Было предложено множество решений этой проблемы. Поэтому задача сравнения матриц сводится к задаче сравнения векторов.

Наличие множества переменных характеризующих комплексные значения

собственных чисел позволяет визуально представлять области сравнения только для квадратных матриц размера 2×2 , у которых одно собственное число является действительным. Так фиксируя матрицу $A = \{\{2 + I, -1 - 2 \cdot I\}, \{-0.5 - I, 2 + 0.3 \cdot I\}\}$, определяем ее собственные числа $\{2.69024 + 2.09877 I, 1.30976 - 0.798769 I\}$. Далее рассматриваем матрицы вида $\{\{X, 0\}, \{0, Y + I Z\}\}$ и можем визуально строить для них области $\{X, Y, Z\}$, для которых эти матрицы меньше заданной A по различным критериям $G1(r, \phi) = r \cdot \text{Exp}(\phi/(2\pi))$, $G2(r, \phi) = r \cdot \text{Exp}(-\phi/(2\pi))$, $G3(r, \phi) = r \cdot \text{Exp}(\cos(-\phi/(2\pi)))$.

На рис.29-31 представлены области сравнения для суммы собственных чисел.

На рис.32-34 представлены области сравнения для произведения собственных чисел. Таким образом мы сравниваем векторы с комплексными компонентами.

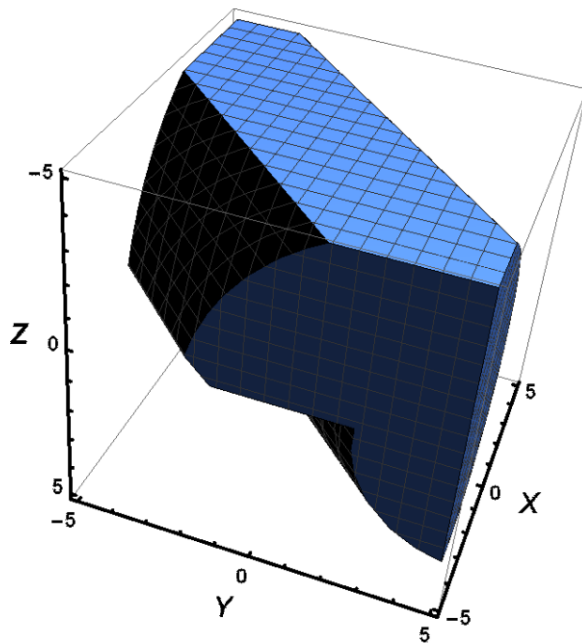


Рисунок 29 – Область определения для суммы собственных чисел для $G1$

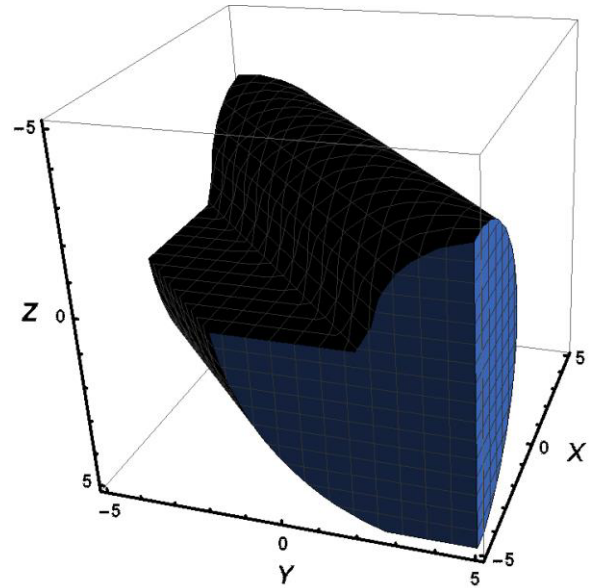


Рисунок 30 – Область определения для суммы собственных чисел для $G2$

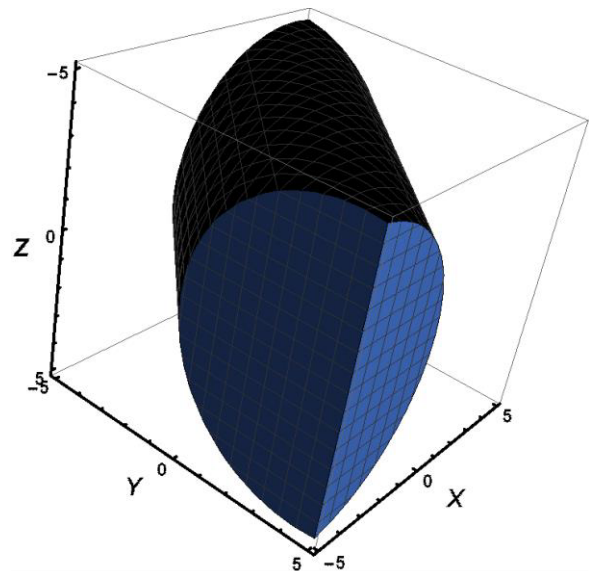


Рисунок 31 – Область определения для суммы собственных чисел для $G3$.

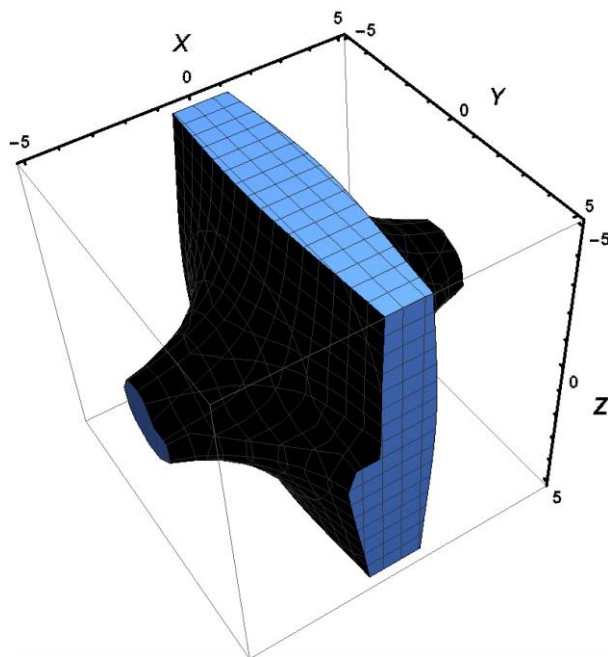


Рисунок 32 – Область определения для произведения собственных чисел для $G1$

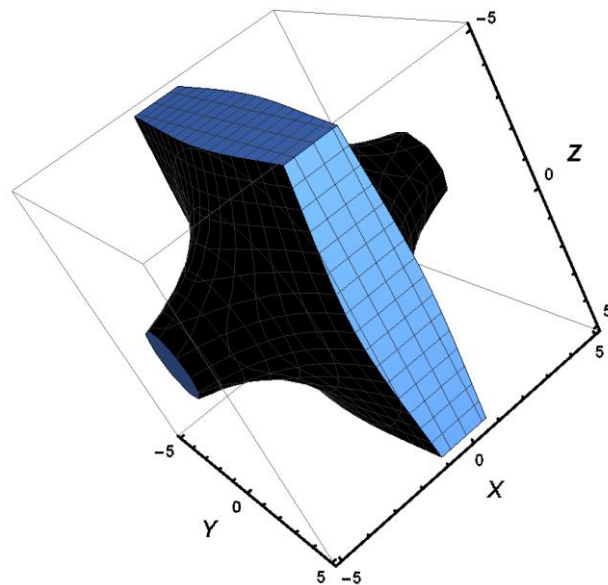


Рисунок 34 – Область определения для произведения собственных чисел для $G3$

Сравнения комплексных чисел для операции T

На рис.35-40 представлены результаты сравнения комплексных чисел при использовании преобразования T . Последнее определено в (1).

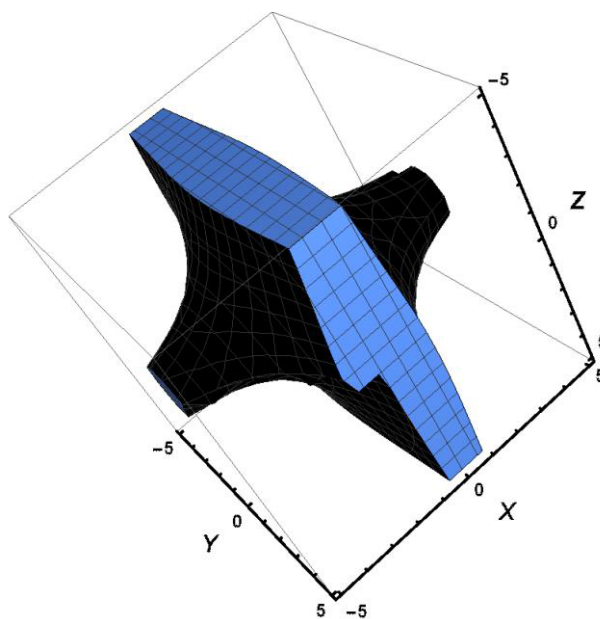


Рисунок 33 – Область определения для произведения собственных чисел для $G2$

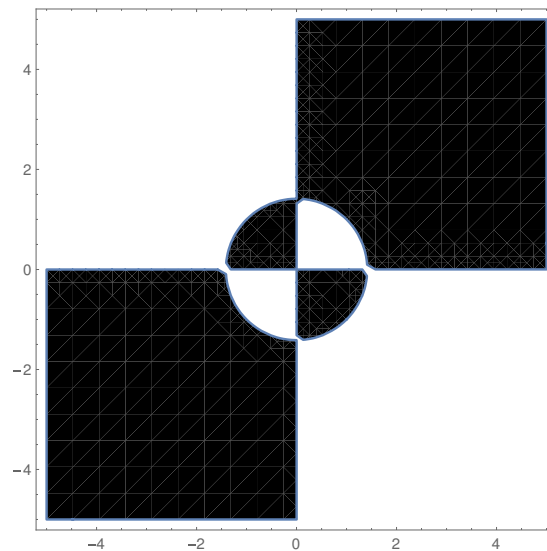


Рисунок 35 – Комплексные числа меньше числа $Z1$ для T

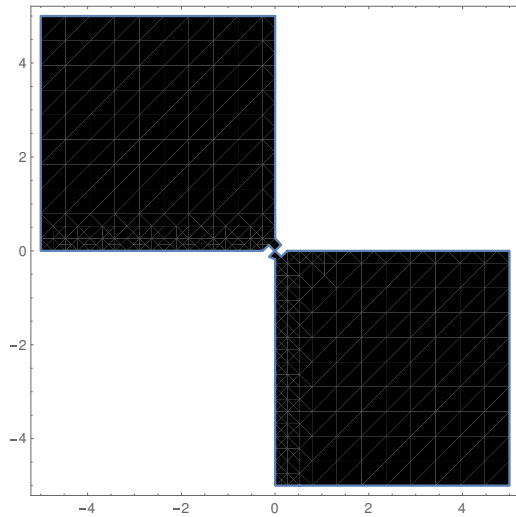


Рисунок 36 – Комплексные числа большие числа Z_2 для T

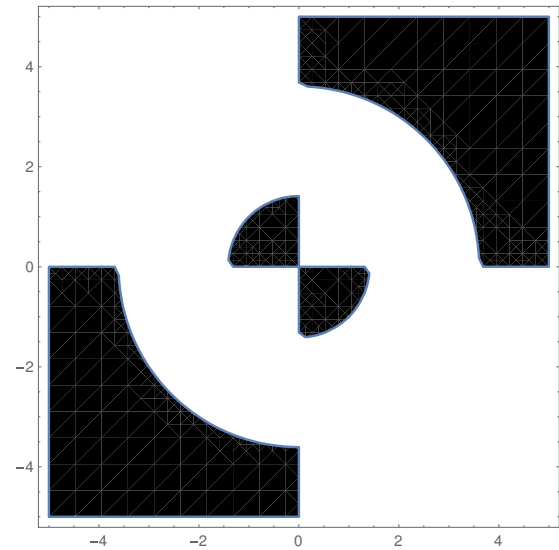


Рисунок 39 – Комплексные числа меньше чем числа Z_1 и больше, чем число Z_2 для T

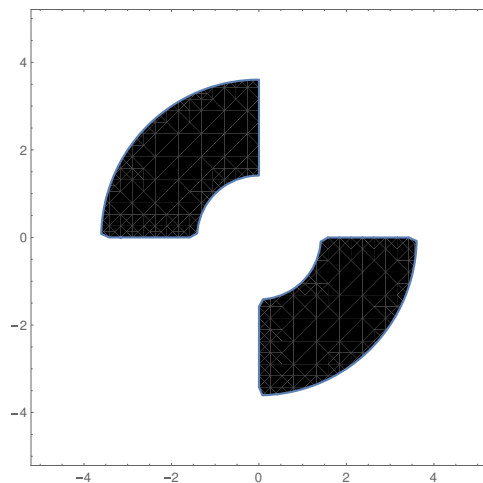


Рисунок 37 – Комплексные числа больше чем числа Z_2 и число Z_1 для T

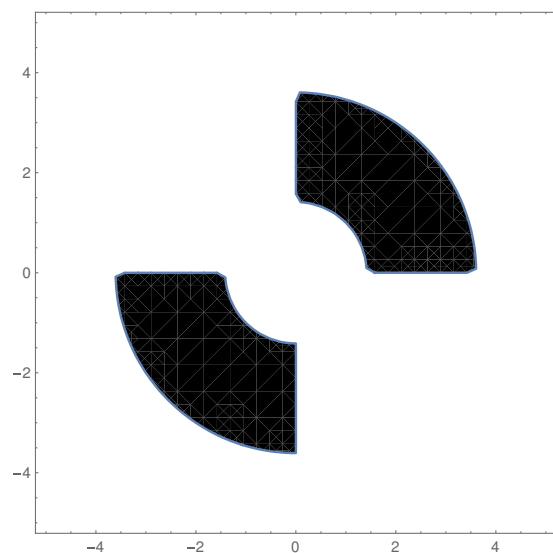


Рисунок 40 – Комплексные числа меньше чем числа Z_1 и меньше, чем число Z_2 для T

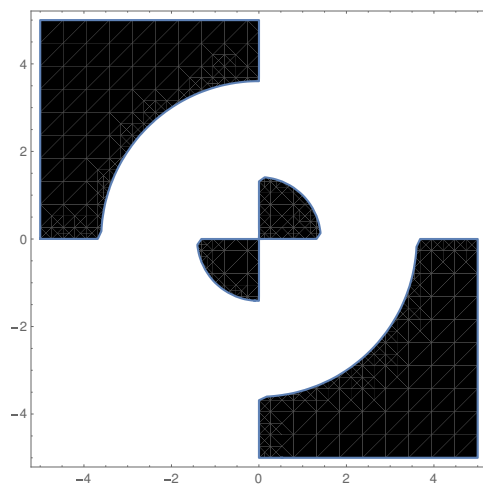


Рисунок 38 – Комплексные числа больше чем числа Z_1 и меньше, чем число Z_2 для T

Решение комплексных уравнений методом Монте-Карло

Использование различных скалярных отображений позволяет оценивать ненаблюдаемые возмущения. Однако интерпретация получаемых результатов затруднительна и сами результаты могут быть достаточно отличающимися друг от друга.

Для примера рассмотрим в общем случае решение уравнения $G(Z)=1$, где в первом случае $G(Z)$ есть класс отображений вида $G_1(Z)=|Z|(\text{Exp}((1-2A) \cdot \text{Arg}(Z)/2\pi))$, зависящий от параметра A . Во втором случае $G_2(Z)=|Z|(\text{Exp}((1-2A) \cdot \sin(\text{Arg}(Z))/2\pi))$. Будем считать, что $\text{Re}(Z) \in (-1, 1)$, $\text{Im}(Z) \in (-1, 1)$, $A \in (0, 1)$. Решения уравнения $G(Z)=1$ определяем неравенствами $|G(Z)-1| < \text{Eps}$.

На рис.41-42 (43-44) представлены области решений для G1 (G2), соответственно.

Значение P определялось с помощью метода Монте-Карло и отражает процентное отношение объема найденной области решений к объему всего пространства решений.

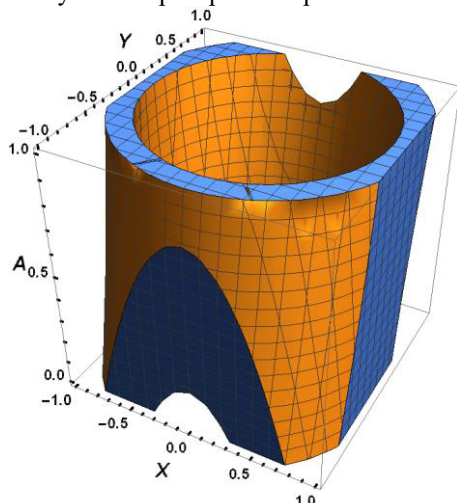


Рисунок 41 – Область решения: $Eps=0.1$, $P=23.9\%$

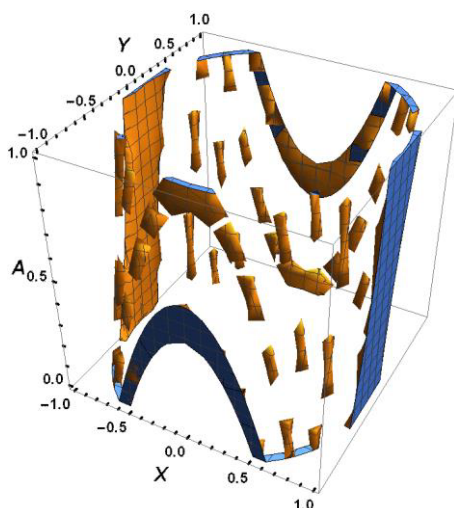


Рисунок 42 – Область решения: $Eps=0.025$, $P=6.5\%$

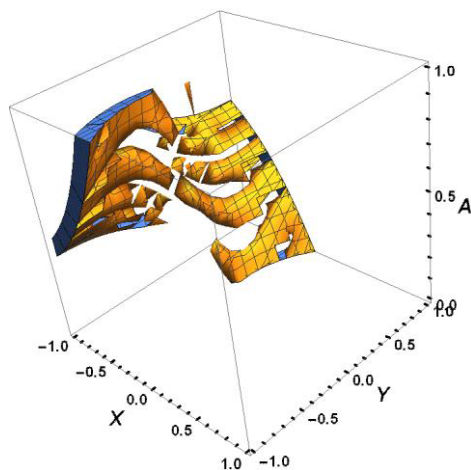


Рисунок 43 – Область решения: $Eps=0.1$, $P=3.9\%$

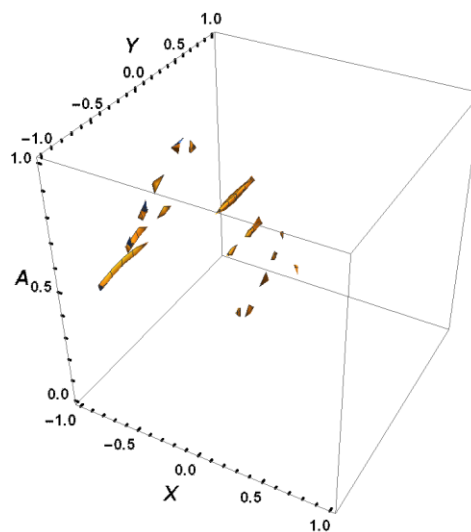


Рисунок 44 – Область решения: $Eps=0.025$, $P=1\%$

Последние результаты использовали подходы и идеи, изложенные в [15-18].

Выводы

Научная новизна работы заключается в том, что получены варианты построения скалярного отображения комплексных чисел. На базе этих отображения рассматриваются возможности скалярного представления матриц.

Заметим, что отображение T является более гибким, нежели скалярные интегральные функции, так как позволяют всегда находить решения для комплексных неравенств.

Приведены визуальные и стохастические оценки интервальные областей отображений для различных их параметров.

Практическая значимость результатов состоит в получении интервальных оценок параметров для некоторых операций, выполняемых с многомерными величинами.

Литература

1. Андрюхин А. И. Статистические компьютерные оценки характеристик многомерных операций и объектов. I. // Информатика и кибернетика, № 1, 2015, с.16-24
2. Балк М. Б. и др. Реальные применения мнимых чисел. К.: Рад. шк., 1988. — 255 с.
3. Complex Analysis for Mathematics and Engineering
4. Кини Р. Л. Размещение энергетических объектов: выбор решений. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 320 с.
5. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981. — 560 с.

6. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий.— М.: Радио и связь, 1993.— 278 с.
7. Саати Т. Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети.— М.: Издательство ЛКИ, 2008.— 360 с.
8. Figueira J., Mousseau V., Roy B. ELECTRE methods // Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys / Ed. by J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott.— International Series in Operations Research & Management Science. Boston: Springer, 2005.— Pp. 609–637.
9. Руа Б. Классификация и выбор при наличии нескольких критериев (метод Электра) // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. Сборник переводов / Под ред. И. Ф. Шахнова.— М.: Мир, 1976.— С. 80–107.
10. Ларичев О. И. Вербальный анализ решений / Под ред. А. Б. Петровского.— М.: Наука, 2006.— 181 с.
11. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах.— 2-е изд.— М.: Логос, 2002.— 392 с.
12. Петровский А. Б., Ройзензон Г. В. Многокритериальный подход к построению интегральных показателей // Таврический Вестник Информатики и Математики.— 2008.— № 2.— С. 143–150.
13. Петровский А. Б. Пространства множеств и мультимножеств.— М.: Едиториал УРСС, 2003.— 248 с.
14. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Под ред. А. Н. Колмогорова, С. П. Новикова. Математика. Новое в зарубежной науке № 3.— М.: Мир, 1976.— 168 с.
15. С.П. Шарый. Конечномерный интервальный анализ, 2013. — 613 с. — <http://www.nsc.ru/interval>
16. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения.— М.: Физматлит, 2006.— 512 с.
17. A.J.Hanson. Visualizing quaternions. Morgan Kaufmann is an imprint of Elsevier 2006 Elsevier Inc..
18. Todd A. E., N. Le Bihan, S. J. Sangwine. Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc, 2014.

Artemenko VA, Andryukhin A.I., Filer Z.E. Computer estimates of the characteristics of multidimensional operations and objects. II. We consider well-known classical multidimensional objects, such as complex and hypercomplex numbers, complex vectors, and matrices. and the definition of their comparison operations. We consider variants of constructing a scalar mapping of complex numbers. Representations and properties of matrices are considered on the basis of this mapping. Visual mock-stochastic estimates of interval mapping regions for various parameters are presented. The results of the work can be used to solve certain problems of constructing stable control systems, the theory of interval analysis, and the theory of system identification. In calculations, Wolfram Mathematica 11.2 was used.

Keywords: scalar mapping, multidimensional operation, complex number, matrix, multidimensional quantities, interval analysis.

Артеменко В.А., Андриюхин А.И., Филер З.Е. Компьютерные оценки характеристик многомерных операций и объектов. II. В работе рассматриваются известные классические многомерные объекты, такие как комплексные и гиперкомплексные числа, комплексные векторы и матрицы. Рассматриваются варианты построения скалярного отображения комплексных чисел. На базе этого отображения рассматриваются представления и свойства матриц. Приведены визуальные и стохастические оценки интервальные областей отображений для различных их параметров. Результаты работы, могут быть использованы при решении определенных вопросов построения устойчивых систем управления, теории интервального анализа и теории идентификация систем. При расчетах применялся пакет Wolfram Mathematica 11.2.

Ключевые слова: скалярное отображение, многомерная операция, комплексное число, матрица, многомерные величины, интервальный анализ.

Статья поступила в редакцию 20.09.2016
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко