УДК 512.572

Эндоморфизмы абелевых полуциклических n–арных групп

В. М. Кусов, Н. А. Щучкин
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
kvm64@yandex.r, nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Кусов В. М., Щучкин Н. А. **Эндоморфизмы абелевых полуциклических n–арных групп.** *Приведено полное описание строения $(n,2)-$ колец эндоморфизмов конечных и бесконечных абелевых полуциклических $n-$ арных групп. Доказан $n-$ арный аналог теоремы Бера–Капланского для конечных абелевых полуциклических $n-$ арных групп. Найдены условия изоморфизма $(n,2)-$ колец эндоморфизмов для бесконечных абелевых полу-циклических n-арных групп.*

Ключевые слова: *абелева $n-$ арная группа, эндоморфизм, полуциклическая $n-$ арная группа, $(n,2)-$ кольцо.*

Введение

n–арный группоид $\langle G, f\rangle$ с *n*–арной операцией f $(n \geq 3)$ называют *n*–арной квазигруппой, если в нем для всех $j = 1,...,n$ разрешимо и имеет единственное решение каждое из уравнений

$$f(a_1,...,a_{j-1},x_j,a_{j+1},...,a_n) = b$$

для любых $a_1,...,a_{j-1},a_{j+1},...,a_n,b$ из G. *n*–Арной квазигруппой, в частности, является *n*–арная группа, которая служит обобщением понятия группы на *n*–арный случай. Именно, *n*–арная квазигруппа $\langle G, f\rangle$ называется *n*–арной группой, если в ней выполняется обобщенный закон ассоциативности

$$f(f(a_1,...,a_n),a_{n+1},...,a_{2n-1}) = \\ f(a_1,...,a_i,f(a_{i+1},...,a_{i+n}),a_{i+n+1},...,a_{2n-1})$$

для всех $i = 1,...,n-1$ (см. стр. 52, [1]). Более раннее изучение *n*–арных групп встречается в работах [2], [3], [4]. Основы теории *n*–арных групп подробно изложены в работах [5], [6], [7]. В *n*–арной группе $\langle G, f\rangle$ для любого элемента $a \in G$ решение уравнения

$$f(\underbrace{a,...,a}_{n-1},x) = a$$

обозначают $\bar{a}$ и называют косым элементом для a. Получаем в *n*–арной группе $\langle G, f\rangle$ унарную операцию $\bar{\ }$. Отметим некоторые свойства этой операции, которые нам понадобятся дальше (см., например, [6]).

Теорема 1. *В любой n–арной группе* $\langle G, f\rangle$ *выполнены свойства:*
1) для любых $x, y \in G$ верны равенства

$$f(y,\underbrace{x,...,x}_{n-2},\bar{x}) = y, f(\bar{x},\underbrace{x,...,x}_{n-2},y) = y;$$

2) любой гомоморфизм φ n–арной группы $\langle G, f\rangle$ сохраняет унарную операцию $\bar{\ }$, т.е. для любого $x \in G$ верно равенство

$$\varphi(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)}.$$

Известно [8], что *n*–арный группоид $\langle G, f\rangle$ является *n*–арной группой тогда и только тогда, когда в нем операция f удовлетворяет обобщенному закону ассоциативности и существует унарная операция $h: x \to \bar{x}$, для которой выполняются тождества

$$f(y,x,...,x,\bar{x},x) = y, f(x,\bar{x},x,...,x,y) = y. \quad (1)$$

Нас интересует отдельный класс *n*–арных групп, точнее, класс абелевых *n*–арных групп. *n*–Арная группа называется абелевой, если в ней верны тождества

$$f(x_1,...,x_n) = f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)})$$

для любой подстановки $\sigma \in S_n$. Если теория абелевых групп давно уже формально является частью теории групп, ее методы и результаты, как правило, не связаны с общей теорией групп (см. [9], [10], [11]), то теория абелевых *n*–арных групп находится в своем первоначальном развитии. Основой этой теории является работа [12]. Надеемся, настоящая работа внесет небольшой вклад в фундамент развития теории абелевых *n*–арных групп.

Некоторые сведения из теории абелевых n–арных групп

Имеется тесная связь между теориями групп и n–арных групп. Частным случаем основных результатов работ [13], [14] является

Теорема 2. *(Предложение 3, [12]). На любой абелевой n–арной группе* $\langle G, f\rangle$ *задается абелева группа* $< G,+ >$ *с бинарной операцией* $+$ *, заданной по правилу:*

$$a+b = f(a,\underbrace{c,\dots,c}_{n-3},\bar{c},b),$$

где c *— фиксированный элемент из* G *. Тогда*

$$f(a_1,\dots,a_n) = a_1+\dots+a_n+d, \qquad (2)$$

где $d = f(\underbrace{c,\dots,c}_{n})$. *Элемент* c *является нулем в группе* $\langle G,+\rangle$ *. Верно и обратно: в любой абелевой группе* $\langle G,+\rangle$ *для выбранного элемента* d *задается абелева n–арная группа* $\langle G, f\rangle$*, где n–арная операция* f *действует по правилу (2).*

В первом случае теоремы 2 группу $\langle G,+\rangle$ называют редуктом абелевой n–арной группы $\langle G, f\rangle$ и обозначают $red_c\langle G, f\rangle$. Любые два редукта одной и той же абелевой n–арной группы изоморфны. Во втором случае теоремы 2 n–арную группу $\langle G, f\rangle$ называют d–производной от абелевой группы $\langle G,+\rangle$ и обозначают $der_d\langle G,+\rangle$ (см. [12]). В [12] также приводятся равенства

$$\langle G, f\rangle = der_d red_c \langle G, f\rangle; \qquad (3)$$

$$\langle G,+\rangle = red_c der_d \langle G,+\rangle. \qquad (4)$$

Имеется критерий изоморфизма абелевых n–арных групп.

Теорема 3. *(Следствие 17, [15]). n–Арные группы* $\langle G, f\rangle = der_d\langle G,+\rangle$ *и* $\langle G', f'\rangle = der_{d'}\langle G',+\rangle$ *изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся изоморфизм* σ *из группы* $\langle G,+\rangle$ *в группу* $\langle G',+\rangle$ *и элемент* $u \in G'$ *такие, что*

$$\sigma(d) = (n-1)u + d'. \qquad (5)$$

Используя идеи из работы [15], доказывается

Теорема 4. *Пусть* $\langle G, f\rangle = der_d\langle G,+\rangle$ *– абелева n–арная группа. Каждое отображение* $\psi : G \to G$ *является эндоморфизмом n–арной группы* $\langle G, f\rangle$ *тогда и только тогда, когда найдутся эндоморфизм* σ *группы* $\langle G,+\rangle$ *и элемент* $u \in G$ *такие, что* ψ *действует по правилу* $\psi(x) = \sigma(x)+u$ *и выполнено условие*

$$\sigma(d) = (n-1)u + d. \qquad (6)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ψ – эндоморфизм *n–арной группы* $\langle G, f\rangle$ и c – нуль в группе $\langle G,+\rangle$. Заметим, что, согласно теореме 2 и равенству (4),

$$a+b = f(a,\underbrace{c,\dots,c}_{n-3},\bar{c},b).$$

Пусть $u = \psi(c)$. Определим отображение $\sigma : G \to G$ по правилу $\sigma(x) = \psi(x) - u$. Покажем, что σ – эндоморфизм группы $\langle G,+\rangle$. Для любых $a,b \in G$, используя теоремы 1, 2, получим

$$\sigma(a+b) = \psi(f(a,\underbrace{c,\dots,c}_{n-3},\bar{c},b)) - \psi(c) =$$

$$= f(\psi(a),\underbrace{\psi(c),\dots,\psi(c)}_{n-3},\psi(\bar{c}),\psi(b)) - \psi(c) =$$

$$= \psi(a) + \underbrace{\psi(c)+\dots+\psi(c)}_{n-3} + \psi(\bar{c}) + \psi(b) + d - \psi(c) =$$

$$= \psi(a) - \psi(c) + \psi(b) - \psi(c) + \underbrace{\psi(c)+\dots+\psi(c)}_{n-2} + \overline{\psi(c)} + d =$$

$$= f(\psi(a) - \psi(c) + \psi(b) - \psi(c) + \underbrace{\psi(c)+\dots+\psi(c)}_{n-2} + \overline{\psi(c)} + d = \sigma(a) + \sigma$$

.

Итак, σ – эндоморфизм группы $\langle G,+\rangle$ и заданный эндоморфизм ψ n–арной группы $\langle G, f\rangle$ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x)+u$. Покажем выполнимость условия (6), используя (2):

$$\sigma(d) = \psi(f(\underbrace{c,\dots,c}_{n})) - u = f(\underbrace{\psi(c),\dots,\psi(c)}_{n}) - u =$$

$$= f(\underbrace{u,\dots,u}_{n}) - u =$$

$$= \underbrace{u+\dots+u}_{n} + d - u = (n-1)u + d.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеются эндоморфизм σ группы $\langle G,+\rangle$ и элемент $u \in G$ такие, что выполнено условие (6). Зададим отображение ψ

из G в G по правилу: для любого $x \in G$, $\psi(x) = \sigma(x) + u$. Покажем, что ψ является эндоморфизмом n–арной группы $\langle G, f \rangle$. Пусть $x_1, ..., x_n \in G$. Используя (2), (6), получим

$$\psi(f(x_1,...,x_n)) = \sigma(f(x_1,...,x_n)) + u =$$
$$= \sigma(x_1 + ... + x_n + d) + u =$$
$$= \sigma(x_1) + ... + \sigma(x_n) + \sigma(d) + \mathrm{u} =$$
$$= \sigma(x_1) + ... + \sigma(x_n) + (n-1)u + d + u =$$
$$= \psi(x_1) + ... + \psi(x_n) + d = f(\psi(x_1),...,\psi(x_n)).$$

Теорема доказана.

Циклические n–арные группы

n–Арным аналогом кратности элемента в группе является n–арная кратность элемента в n–арной группе. Результат применения k раз $(k > 0)$ операции f к $k(n-1)+1$ одинаковым элементам, которые равны элементу a, называется положительной k–той n–арной кратностью элемента a и обозначается $k \cdot_n a$. Полагают $0 \cdot_n a = a$. Отрицательную k–тую n–арную кратность элемента a определяют как решение уравнения $f(\underbrace{a,...,a}_{-k(n-1)}, x) = a$. Таким образом, при $k \geq 0$ верно равенство $k \cdot_n a = f(\underbrace{a,...,a}_{k(n-1)+1})$, а при $k < 0$ верно равенство $f(\underbrace{a,...,a}_{-k(n-1)}, k \cdot_n a) = a$. Отметим основные свойства n–арной кратности (их можно найти в работах [3], [5], [6]).

Теорема 5. *В n–арной группе* $\langle G, f \rangle$ *(не обязательно абелевой) для любого элемента* a *из* G *и любых целых чисел* $k_1, ..., k_n, k$ *верны равенства*

1) $f(k_1 \cdot_n a, ..., k_n \cdot_n a) = (k_1 + ... + k_n + 1) \cdot_n a$;

2) $k_1 \cdot_n (k_2 \cdot_n a) = (k_1 k_2 (n-1) + k_1 + k_2) \cdot_n a$;

3) $\overline{a} = (-1) \cdot_n a$;

4) $k \cdot_n \overline{a} = (-k(n-2)-1) \cdot_n a = \overline{k \cdot_n a}$.

Не сложно показать (см. [3], [5], [6]), что в n–арной группе $\langle G, f \rangle$ для фиксированного элемента a множество $\langle a \rangle$ всех n–арных кратностей элемента a является n–арной подгруппой, которую называют циклической n–арной подгруппой. n–Арная группа $\langle G, f \rangle$ называется циклической с порождающим элементом a, если она совпадает с одной из своих циклических n–арных подгрупп $\langle \langle a \rangle, f \rangle$.

Очевидно, любая циклическая n–арная группа является абелевой.

Примером бесконечной циклической n–арной группы служит n–арная группа

$$\langle Z, f \rangle = der_1 \langle Z, + \rangle,$$

1–производная от аддитивной группы целых чисел. Операция f действует по правилу $f(z_1, ..., z_n) = z_1 + ... + z_n + 1$. Всякое целое число k является k–ой n–арной кратностью числа 0, т.е. 0 служит порождающим элементом бесконечной циклической n–арной группы $\langle Z, f \rangle$.

Примером конечной циклической n–арной группы порядка k служит n–арная группа

$$\langle Z_k, f \rangle = der_1 \langle Z_k, + \rangle,$$

1–производная от аддитивной группы кольца классов вычетов по модулю k. Операция f действует так же, как в предыдущем примере, только складываются числа по модулю k. Всякое число s из Z_k является s–той n–арной кратностью числа 0, т.е. 0 служит порождающим элементом конечной циклической n–арной группы $\langle Z_k, f \rangle$.

Следующая теорема показывает, что этими примерами исчерпываются, по существу, все циклические n–арные группы.

Теорема 6. *[3], [5]. Любые две циклические n–арные группы, бесконечные или конечные одного и того же порядка, изоморфны.*

Как и в группах, гомоморфный образ циклической n–арной группы с порождающим элементом a является циклической n–арной группой, которая порождается образом элемента a (проверяется непосредственно).

Абелевы полуциклические n–арные группы

В теории абелевых групп при построении конечно-порожденных групп основными объектами являются циклические группы. Однако в теории абелевых n–арных групп такими объектами являются не циклические, а абелевы полуциклические n–арные группы (см. предложение 5 на стр. 31 в [12]).

Абелеву n–арную группу называют полуциклической [6], если ее редукт является циклической группой. Очевидно, любая циклическая n–арная группа является полуциклической. Заметим, что аналогично можно построить циклическую группу на n–арной группе, не обязательно абелевой (см., например, [16]), такие n–арные группы также называют полуциклическими. Нас интересуют только абелевы полуциклические n–арные группы.

n–Арная группа $\langle Z, f\rangle = der_l \langle Z,+\rangle$, l–производная от аддитивной группы целых чисел, является примером бесконечной абелевой полуциклической n–арной группы. Операция f действует по правилу: $f(z_1,...,z_n) = z_1 + ... + z_n + l$.

Теорема 7. *[16]. Любая бесконечная абелева полуциклическая n–арная группа изоморфна n-арной группе* $\langle Z_k, f\rangle = der_l \langle Z_k,+\rangle$, *где* $l \,|\, НОД(n-1,k)$.

Две n–арные группы $\langle Z, f_1\rangle = der_{l_1} \langle Z,+\rangle$ и $\langle Z, f_2\rangle = der_{l_2} \langle Z,+\rangle$, где $l_1 \neq l_2$ и $0 \le l_1, l_2 \le \left[\frac{n-1}{2}\right]$, не изоморфны, а поэтому количество различных бесконечных абелевых полуциклических n–арных групп с точностью до изоморфизма равно $1+\left[\frac{n-1}{2}\right]$ (см. [17]). Будем говорить, что абелева полуциклическая n–арная группа имеет тип (∞, l), если она при фиксированном l, где $0 \le l \le \left[\frac{n-1}{2}\right]$, изоморфна n–арной группе $\langle Z, f\rangle = der_l \langle Z,+\rangle$ по теореме 7. Абелева полуциклическая n–арная группа типа (∞, l) будет циклической.

Примером конечной абелевой полуциклической n–арной группы порядка k служит n–арная группа $\langle Z_k, f\rangle = der_l \langle Z_k,+\rangle$, l–производная от аддитивной группы кольца классов вычетов по модулю k. Операция f действует так же, как в предыдущем примере, только складываются числа по модулю k.

Теорема 8. *[16]. Любая конечная абелева полуциклическая n–арная группа порядка* k *изоморфна n–арной группе* $\langle Z_k, f\rangle = der_l \langle Z_k,+\rangle$, *где* $l \,|\, НОД(n-1,k)$.

n–Арные группы $\langle Z_k, f_1\rangle = der_{l_1} \langle Z_k,+\rangle$ и $\langle Z_k, f_2\rangle = der_{l_2} \langle Z_k,+\rangle$, где $l_1 \neq l_2$ и $l_1, l_2 \,|\, НОД(m-1,k)$, не изоморфны, а поэтому количество различных конечных абелевых полуциклических n–арных групп одного и того же порядка k с точностью до изоморфизма равно количеству натуральных делителей $\tau(НОД(n-1,k))$ числа $НОД(n-1,k)$ [17]. Будем говорить, что абелева полуциклическая n–арная группа имеет тип (k,l), если она при фиксированном l, где $l \,|\, НОД(n-1,k)$, изоморфна n–арной группе $\langle Z_k, f\rangle = der_l \langle Z_k,+\rangle$, по теореме 8. Абелева полуциклическая n–арная группа типа $(k,1)$ будет циклической.

(n,2)–Кольцо эндоморфизмов абелевой n–арной группы

В [18] алгебру $\langle A, f, g\rangle$ с n–арной операцией f и m–арной операцией g называют $(n,\ m)$–кольцом, если $\langle A, f\rangle$ является абелевой n–арной группой, $\langle A, g\rangle$ является m–арной полугруппой (m–арным группоидом с обобщенным законом ассоциативности) и для $i = 1,...,m$ выполнены следующие законы дистрибутивности

$$\begin{aligned} & g(y_1,..., y_{i-1}, f(x_1,...,x_n), y_{i+1},..., y_m) = \\ & = f(g(y_1,..., y_{i-1}, x, y_{i+1},..., \\ & g(y_1,..., y_{i-1}, x, y_{i+1},..., y_m)). \end{aligned} \tag{7}$$

В работе [19] доказана

Теорема 9. *(W.A.Dudek). Множество* $End\langle A, f_1\rangle$ *всех эндоморфизмов абелевой n–арной группы* $\langle A, f_1\rangle$ *с n–арной операцией* f *, действующей по правилу*

$$f(\alpha_1,...,\alpha_n)(x) = f_1(\alpha_1(x),...,\alpha_n(x) \quad (x \in A), \tag{8}$$

и бинарной операцией o *– композицией эндоморфизмов, является* $(n,2)$*–кольцом с единицей.*

Очевидно, унарная операция $h: x \to \bar{x}$ является эндоморфизмом в абелевой n–арной группе $\langle A, f_1\rangle$.

Теорема 10. *Унарная операция* $h: x \to \bar{x}$ *является косым элементом для тождественного отображения* 1_A *в* $(n,\ 2)$*–кольце* $\langle End\langle A, f_1\rangle, f, \text{o}\rangle$, *т.е.* $\overline{1_A} = h$.

Доказательство. Пусть $x \in A$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\underbrace{1_A,...,1_A}_{n-1}, h)(x) &= f_1(\underbrace{1_A(x),...,1_A(x)}_{n-1}, h(x)) = \\ &= f_1(\underbrace{x,...,x}_{n-1}, \bar{x}) = x. \end{aligned}$$

Значит, $f(1_A,...,1_A,h) = 1_A$, т.е. $\overline{1_A} = h$. Теорема доказана.

Далее рассмотрим примеры $(n,2)$–колец эндоморфизмов абелевых n–арных групп.

Пример 1. Пусть $\langle Z, f_1\rangle$ – бесконечная циклическая n–арная группа, где Z – целые числа, $f_1(z_1,...,z_n)=z_1+...+z_n+1$, где $+$ – сложение целых чисел (см. выше). На Z определим бинарную операцию $*$ по правилу $y*z=y\cdot z\cdot(n-1)+y+z$, где $\cdot$ – обычное умножение целых чисел. Ассоциативность операции $*$ проверяется непосредственно. Кроме того,

$$y*f_1(z_1,...,z_n)=y\cdot(z_1+...+z_n+1)\cdot$$
$$\cdot(n-1)+y+z_1+...+z_n+1=$$
$$=y\cdot z_1\cdot(n-1)+...+y\cdot z_n\cdot(n-1)+$$
$$+y\cdot(n-1)+y+z_1+...+z_n+1=$$
$$=y\cdot z_1\cdot(n-1)+y+z_1+...+y\cdot z_n\cdot(n-1)+y+z_n+1=$$
$$=f_1(y*z_1,...,y*z_n).$$

Аналогично $f_1(z_1,...,z_n)*y=f_1(z_1*y,...,z_n*y)$. Мы получили ($n$, 2)–кольцо $\langle Z,f_1,*\rangle$, которое назовем (n, 2)– кольцом целых чисел.

Согласно замечанию в конце пункта 3, любой эндоморфизм α абелевой n–арной группы $\langle Z,f_1\rangle$ вполне определяется числом $\alpha(0)=b\in Z$, причем, очевидно, для каждого целого числа b существует такой эндоморфизм α, что $\alpha(0)=b$. Установим соответствие $\tau:\alpha\to b$ между $End\langle Z,f_1\rangle$ и Z такое, что $\alpha(0)=b$. Из выше сказанного следует биективность τ. Далее, если $\alpha_1,...,\alpha_n\in End\langle Z,f_1\rangle$ и $\alpha_i(0)=b_i$, $i=1,...,n$, то, согласно (8), получим

$$f(\alpha_1,...,\alpha_n)(0)=f_1(\alpha_1(0),...,\alpha_n(0))=f_1(b_1,...,b_n),$$

а значит, $\tau(f(\alpha_1,...,\alpha_n))=f_1(b_1,...,b_n)=f_1(\tau(\alpha_1),...,\tau(\alpha_n))$.

Кроме того, для любых $\alpha,\beta\in End\langle Z,f_1\rangle$ полагаем $\alpha(0)=b_1$, $\beta(0)=b_2$. Тогда для любого целого числа z получим $\alpha(z)=\alpha(z\cdot_n 0)=z\cdot_n\alpha(0)=z\cdot_n b_1$, аналогично $\beta(z)=z\cdot_n b_2$. Тогда, используя свойство 2 из теоремы 5, получим

$$\alpha\circ\beta(0)=\alpha(\beta(0))=\alpha(b_2)=b_2\cdot_n b_1=b_2\cdot_n(b_1\cdot_n 0)=$$
$$=(b_1\cdot b_2\cdot(n-1)+b_1+b_2)\cdot_n 0=b_1\cdot b_2\cdot(n-1)+b_1+b_2.$$
+ b2.

Значит, $\tau(\alpha\circ\beta)=b_1\cdot b_2\cdot(n-1)+b_1+b_2=b_1*b_2=\tau(\alpha)+\tau(\beta).$

Таким образом, τ — изоморфизм из (n,2)–кольца эндоморфизмов $\langle End\langle Z,f_1\rangle,f,\circ\rangle$ в (n, 2)–кольцо целых чисел $\langle Z,f_1,*\rangle$, т.е.

$$\langle End\langle Z,f_1\rangle,f,\circ\rangle\cong\langle Z,f_1,*\rangle.$$

Пример 2. Пусть $\langle Z_k,f_k\rangle=der_1\langle Z_k,+\rangle$ – конечная циклическая n–арная группа порядка k, где Z_k – аддитивная группа кольца классов вычетов по модулю k. Эта циклическая n-арная группа порождается нулем, т.е. всякое число s из Z_k является s–той n–арной кратностью числа 0, т.е. $s=s\cdot_n 0$. Кроме того, n–арная операция f_1 по правилу $f_1(s_1,...,s_n)=s_1+...+s_n+1$, где $+$ — сложение по модулю k (см. выше).

На Z_k определим бинарную операцию $*$ по правилу $y*z=y\cdot z\cdot(n-1)+y+z$, где $\cdot$ — умножение в кольце классов вычетов по модулю k. Тогда, как и в примере 1, операция $*$ ассоциативна, кроме того,

$$y*f_1(z_1,...,z_n)=f_1(y*z_1,...,y*z_n) \text{ и}$$
$$f_1(z_1,...,z_n)*y=f_1(z_1*y,...,z_n*y).$$

Мы получили (n, 2)–кольцо $\langle Z,f_1,*\rangle$, которое назовем (n, 2)–кольцом классов вычетов по модулю k.

Согласно замечанию в конце пункта 3, любой эндоморфизм α абелевой n–арной группы $\langle Z_k,f_1\rangle$ вполне определяется числом $\alpha(0)=s\in Z_k$, причем, очевидно, для каждого целого числа s из Z_k существует такой эндоморфизм α, что $\alpha(0)=s$. Установим соответствие $\tau:\alpha\to s$ между $End\langle Z_k,f_1\rangle$ и Z_k такое, что $\alpha(0)=s$. Из выше сказанного следует биективность τ. Далее, если $\alpha_1,...,\alpha_n\in End\langle Z_k,f_k\rangle$ и $\alpha_i(0)=s_i$, $i=1,...,n$, то, согласно (6), получим

$$f(\alpha_1,...,\alpha_n)(0)=f_1(\alpha_1(0),...,\alpha_n(0))=f_1(s_1,...,s_n),$$

а значит,
$\tau(f(\alpha_1,...,\alpha_n))=f_1(s_1,...,s_n)=f_1(\tau(\alpha_1),...,\tau(\alpha_n))$.

Далее, для любых $\alpha,\beta\in End\langle Z_k,f_1\rangle$ имеем $\tau(\alpha\circ\beta)=\tau(\alpha)*\tau(\beta)$ (как в примере 1).

Итак, τ — изоморфизм между (n, 2)–кольцом эндоморфизмов $\langle End\langle Z_k,f_1\rangle,f,\circ\rangle$ и (n, 2)–кольцом классов вычетов $\langle Z_k,f_1,*\rangle$, т.е.

$$\langle End\langle Z_k,f_1\rangle,f,\circ\rangle\cong\langle Z_k,f_1,*\rangle.$$

Пример 3. На аддитивной группе целых чисел Z строим абелеву полуциклическую n–арную группу $\langle Z, f_1\rangle = der_l Z$, где $0 \le l \le \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ и n–арная операция f_1 действует по правилу $f_1(x_1,...,x_n) = x_1 + ... + x_n + l$. Каждый эндоморфизм ψ n–арной группы $\langle Z, f_1\rangle$ определяется (см. теорему 4) некоторыми эндоморфизмом σ аддитивной группы Z и целым числом u такими, что

$$\sigma(l) = (n-1)u + l. \qquad (9)$$

Причем, ψ действует по правилу $\psi(x) = \sigma(x) + u$. Эндоморфизм σ определяется однозначно образом единицы $\sigma(1) = m$. Тогда из (9) имеем

$$lm = (n-1)u + l \ \text{ или } \ (n-1)u = l(m-1).$$

Таким образом, эндоморфизм ψ определяется однозначно некоторым числом m таким, что $l(m-1)$ делится на $n-1$, и действует по правилу

$$\psi(x) = mx + \frac{l(m-1)}{n-1}.$$

В Z рассмотрим множество $M = \{m \in Z \,|\, l(m-1) \text{ делится на } n-1\}$. На M определим n–арную операцию f_2 по правилу: если $m_1,...,m_n \in M$, то

$$f_2(m_1,...,m_n) = m_1 + ... + m_n.$$

Множество M замкнуто относительно действия f_2. Действительно, число

$$l(m_1 + ... + m_n - 1) = l(m_1 - 1 + ... + m_n - 1 + n - 1)$$

делится на $n-1$. Если $m \in M$, то $\bar{m}$ удовлетворяет равенству $(n-1)m + \bar{m} = m$ (определение косого элемента), откуда $\bar{m} = -(n-2)m$. Тогда число

$$l(\bar{m} - 1) = l(-(n-2)m - 1) = l(m - 1 - (n-1)m)$$

делится на $n-1$. Значит, множество M замкнуто относительно действия операции $\bar{\ }$. Выполнимость тождеств (1) для этой операции очевидна. Итак, $\langle M, f_2\rangle$ — n–арная группа (см. введение), очевидно, она будет абелевой. Множество M замкнуто относительно обычного умножения целых чисел. Действительно, если даны два сравнения $lm_1 \equiv l(\mathrm{mod}\, n-1)$ и $lm_2 \equiv l(\mathrm{mod}\, n-1)$, то из первого сравнения имеем $lm_1m_2 \equiv lm_2(\mathrm{mod}\, n-1)$, а из второго и последнего сравнений имеем $lm_1m_2 \equiv l(\mathrm{mod}\, n-1)$. Таким образом, $\langle M, f_2, \cdot\rangle$ — (n, 2)–кольцо.

Каждому эндоморфизму ψ n–арной группы $\langle Z, f_1\rangle$ ставим в соответствие τ целое число m из M по правилу:

$$\tau : \psi \to m \Leftrightarrow \text{для любого } x \in Z,$$

$$\psi(x) = mx + \frac{l(m-1)}{n-1}.$$

Имеем биективность τ (согласно теореме 4). Пусть $\psi_1,...,\psi_n \in End\langle Z, f_1\rangle$, тогда $\psi_i(x) = m_1 x + \dfrac{l(m_i - 1)}{n-1}$, $i = 1,...,n$. Откуда, согласно (8), получим

$$f(\psi_1,...,\psi_n)(x) = f_1(\psi_1(x),...,\psi_n(x)) =$$

$$= m_1 x + \frac{l(m_1 - 1)}{n-1} + ... + m_n x + \frac{l(m_n - 1)}{n-1} + l =$$

$$= (m_1 + ... + m_n)x + \frac{l(m_1 + ... + m_n - 1)}{n-1}.$$

Тогда $\tau(f(\psi_1,...,\psi_n)) = m_1 + ... + m_n = f_2(\tau(\psi_1),...,\tau(\psi_n))$.

Для $\psi_1, \psi_2 \in End\langle Z, f_1\rangle$, где $\psi_i(x) = m_i x + \dfrac{l(m_i - 1)}{n-1}$, $i = 1, 2$, имеем

$$\psi_1 \circ \psi_2(x) = \psi_1(\psi_2(x)) = \psi_1\left(m_2 x + \frac{l(m_2 - 1)}{n-1}\right) =$$

$$= m_1\left(m_2 x + \frac{l(m_2 - 1)}{n-1}\right) + \frac{l(m_1 - 1)}{n-1} = m_1 m_2 x + \frac{l(m_1 m_2 - 1)}{n-1}.$$

Тогда $\tau(\psi_1 \circ \psi_2) = m_1 \cdot m_2 = \tau(\psi_1) \cdot \tau(\psi_2)$. Итак, получили изоморфизм (n, 2)–колец

$$\langle End\langle Z, f_1\rangle, f, \circ\rangle \cong \langle M, f_2, \cdot\rangle.$$

Покажем, что абелева n–арная группа $\langle M, f_2\rangle$ является полуциклической типа (∞, v), где $v = НОД(m-1, l)$. На n–арной группе $\langle M, f_2\rangle$ для выбранного $1 \in M$ определяем сложение $\oplus$ (как в теореме 2) по правилу

$$m_1 \oplus m_2 = f_2(m_1, \underbrace{1,...,1}_{n-3}, \bar{1}, m_2).$$

Непосредственная проверка показывает, что $\bar{1} = -(n-2)$, тогда, согласно правилу действия операции f_2, получим

$$m_1 \oplus m_2 = m_1 + (n-3) + (-(n-2)) + m_2 = m_1 + m_2 - 1.$$

Получили абелеву группу $\langle M, \oplus \rangle$ (согласно теореме 2). Отметим, что 1 является нулем в $\langle M, \oplus \rangle$. Непосредственная проверка показывает, что кратность в группе $\langle M, \oplus \rangle$ определяется по правилу: если $s \in Z$, $m \in M$, то

$$s \mathrm{e}\ m = sm - s + 1.$$

Теперь покажем, что $\langle M, \oplus \rangle$ является циклической группой с порождающим элементом $t+1$, где $t = \frac{n-1}{v}$. Действительно, если m — любой элемент из M, то из делимости $l(m-1)$ на $n-1$ следует делимость $m-1$ на t, пусть $m-1 = tq$, откуда $m = tq + 1 = q(t-1) - q + 1 = q \mathrm{e}\ (t+1)$. Итак, $\langle M, \oplus \rangle$— циклическая группа с порождающим элементом $t+1$. Отметим, что $n = n - 1 + 1 = vt + 1 = v \mathrm{e}\ (t+1)$ и, кроме того, $n = f_2(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$. Тогда, согласно теореме 7, абелева *n*–арная группа $\langle M, f_2 \rangle$ является полуциклической типа (∞, v).

На аддитивной группе целых чисел Z строим еще одну абелеву полуциклическую *n*–арную группу $\langle Z, f_3 \rangle = der_v Z$, где $v = НОД(n-1, l)$, причем v, также как и l, удовлетворяет условию $0 \le v \le \left[\frac{n-1}{2} \right]$, и *n*–арная операция f_3 действует по правилу $f_3(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n + v$. На Z определим еще бинарную операцию $*$ по правилу $z_1 * z_2 = z_1 z_2 t + z_1 + z_2$, где $t = \frac{n-1}{v}$. Непосредственная проверка показывает ассоциативность операции $*$. Если $z_1, \ldots, z_n, z_{n+1} \in Z$, то

$$f_1(z_1, \ldots, z_n) * z_{n+1} = (x_1 + \ldots + x_n + v) z_{n+1} t + \\ + x_1 + \ldots + x_n + v + z_{n+1} =$$

$$= x_1 z_{n+1} t + \ldots + x_n z_{n+1} t + v z_{n+1} t + x_1 + \ldots + x_n + v + z_{n+1} = \\ = x_1 z_{n+1} t + \ldots + x_n z_{n+1} t + \\ + (n-1) z_{n+1} + x_1 + \ldots + x_n + v + z_{n+1} =$$

$$x_1 z_{n+1} t + x_1 + z_{n+1} + \ldots + x_n z_{n+1} t + x_n + z_{n+1} + v = \\ = f_3(x_1 * z_{n+1}, \ldots, x_n * z_{n+1}).$$

Правая дистрибутивность для операций f_3 и $*$ доказана. Аналогично доказывается левая дистрибутивность. Итак, $\langle Z, f_3, * \rangle$ — (*n*, 2)–кольцо. Покажем изоморфизм этого (*n*, 2)–кольца и $\langle M, f_2, \cdot \rangle$. Каждому целому числу z ставим в соответствие τ число $z \mathrm{e}\ (t+1)$. Так как 1 и $t+1$ порождают соответственно циклические группы Z и $\langle M, \oplus \rangle$, то τ — изоморфизм этих групп. Кроме того,

$$\tau(f_3(z_1, \ldots, z_n)) = (z_1 + \ldots + z_n + v) \mathrm{e}\ (t+1) = \\ = (z_1 + \ldots + z_n + v)t + 1 =$$

$$= z_1 t + \ldots + z_n t + vt + 1 = z_1 t + \ldots + z_n t + n = \\ = f_2(z_1 \mathrm{e}\ (t+1), \ldots, z_n \mathrm{e}\ (t+1)),$$

$$\tau(z_1 * z_2) = (z_1 z_2 t + z_1 + z_2) \mathrm{e}\ (t+1) = \\ = (z_1 z_2 t + z_1 + z_2)t + 1 =$$

$$= z_1 z_2 t^2 + z_1 t + z_2 t + 1 = (z_1 t + 1)(z_2 t + 1) = \\ = \tau(z_1) \cdot \tau(z_2).$$

Итак, $\langle Z, f_3, * \rangle \cong \langle M, f_2, \cdot \rangle$. Тогда $\langle End \langle Z, f_1 \rangle, f, \mathrm{o} \rangle \cong \langle Z, f_3, * \rangle$.

Заметим, что если $l = 1$, то $v = 1$ и операция f_3 совпадает с f_1. Это показывает согласованность полученных результатов примера 1 и примера 3 для $l = 1$.

Пример 4. На аддитивной группе кольца классов вычетов Z_k строим абелеву полуциклическую *n*–арную группу $\langle Z_k, f_1 \rangle = der_l Z_k$, где $0 \le l < k$ и $l \mid НОД(n-1, k)$. Согласно правилу (2), *n*–арная операция f_1 действует по правилу $f_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n + l$, где $+$ — сложение по модулю k. Каждый эндо-морфизм ψ *n*–арной группы $\langle Z_k, f_1 \rangle$ определяется (см. теорему 4) некоторыми эндоморфизмом φ и элементом u группы $\langle Z_k, + \rangle$ такими, что

$$\varphi(l) \equiv (n-1)u + l \pmod{k}, \tag{10}$$

причем ψ действует по правилу

$$\psi(x) = \varphi(x) + u. \tag{11}$$

Эндоморфизм φ задается однозначно образом $\varphi(1) = \mathrm{m}$ единицы группы $\langle Z_k, + \rangle$. Тогда из (10) имеем $lm \equiv (n-1)u + l \pmod{k}$ или $(n-1)u \equiv l(m-1) \pmod{k}$. Таким образом, элемент u является решением сравнения

$$(n-1)x \equiv l(m-1) \pmod{k}. \tag{12}$$

Это решение существует тогда и только тогда, когда $l(m-1)$ делится на $НОД(n-1,k)$ или, что тоже самое, $lm \equiv l \pmod{НОД(n-1,k)}$. Но l делит $НОД(n-1,k)$, значит, из последнего сравнения имеем $m \equiv 1 \pmod{d_1}$, где $НОД(n-1,k) = d_1 l$.

Таким образом, если образ единицы $\varphi(1) = m$ эндоморфизма φ группы $\langle Z_k, +\rangle$ сравним с единицей по модулю d_1, то этот эндоморфизм вместе с каждым решением u сравнения (12) (таких решений $НОД(n-1,k)$) определяет эндоморфизм ψ n–арной группы $\langle Z_k, f_1\rangle$ по правилу (11).

В декартовом квадрате $Z_k \times Z_k$ выделим подмножество

$$P = \left\{(m,u) \middle| m \equiv 1 \pmod{d_1} \text{ и } (n-1)u \equiv l(m-1) \pmod{k}\right\}.$$

На P определим n–арную операцию f_2 по правилу

$$f_2((m_1,u_1),\dots,(m_n,u_n)) = (m_1+\dots+m_n, u_1+\dots+u_n+l),$$

где + — сложение по модулю k. Непосредственная проверка показывает, что $\langle P, f_2\rangle$ — абелева n–арная группа.

На P определим еще одну бинарную операцию Ω по правилу

$$(m_1,u_1)\Omega(m_2,u_2) = (m_1 \cdot m_2, m_1 \cdot m_2 + u),$$

где $(n-1)u_i \equiv l(m_i - 1) \pmod{k}$ для $m_i \equiv 1 \pmod{d_1}$, $i = 1,2$ и операции $\cdot$, $+$ выполнены в кольце классов вычетов Z_k. Непосредственная проверка показывает, что $\langle P, f_2, \Omega\rangle$ — (n, 2)–кольцо. Так же проверяется непосредственно изоморфизм (n, 2)– колец

$$\langle End\langle Z_k, f_1\rangle, f, \circ\rangle \cong \langle P, f_2, \Omega\rangle.$$

Покажем теперь, что в построенном нами (n, 2)–кольце $\langle P, f_2, \Omega\rangle$ абелева n–арная группа $\langle P, f_2\rangle$ изоморфна прямому произведению n–арных групп $\langle Z_k, f_1\rangle$ и $\langle Z_k, f_3\rangle$, где операция f_3 действует по правилу: $f_3(x_1,\dots,x_n) = x_1+\dots+x_n$.

Зададим отображение $\tau: P \to Z_k \times Z_l$ по правилу $\tau((m,u)) = (u,v)$, где v — остаток от деления $\frac{l(m-1)-u(n-1)}{k}$ на l.

Покажем сюръективность τ. Пусть $(u,v) \in Z_k \times Z_l$. Находим m из Z_k такое, что верно сравнение $(n-1)u \equiv l(m-1) \pmod{k}$ (таких m может быть несколько), и после этого требуем выполнимость сравнения $\frac{l(m-1)-u(n-1)}{k} \equiv v \pmod{l}$. Сравнение $lx \equiv (n-1)u \pmod{k}$ с неизвестным x разрешимо и имеет l решений (т.к. $l \,|\, НОД(n-1,k)$, а значит, $НОД(l,k) = l \,|\, u(n-1)$).

Укажем эти решения: $x_i \equiv \frac{(n-1)u}{l} + j\frac{k}{l} \pmod{k}$, где $j = 0,1,\dots,l-1$. Выбираем $m - 1 \equiv \frac{(n-1)u}{l} + v\frac{k}{l} \pmod{k}$ и $m \in Z_k$. Обе части последнего сравнения и модуль умножаем на l, получим $l(m-1) \equiv (n-1)u + vk \pmod{kl}$ или $l(m-1)-(n-1)u \equiv vk \pmod{kl}$. Обе части последнего сравнения и модуль делим на k, получим $\frac{l(m-1)-(n-1)u}{k} \equiv v \pmod{l}$. Итак, сюръективность τ доказана.

Покажем инъективность τ. Пусть $\tau((m_1,u_1)) = \tau((m_2,u_2))$, т.е.

$$(u_1,v_1) = (u_2,v_2), \tag{13}$$

где $\frac{l(m_1-1)-(n-1)u_1}{k} = q_1 l + v_1$ и $\frac{l(m_2-1)-(n-1)u_2}{k} = q_2 l + v_2$ для некоторых целых чисел q_1, q_2 и $0 \le v_1, v_2 \le l-1$. Из (13) имеем $u_1 = u_2$ и $v_1 = v_2$. Тогда $\frac{l(m_1-1)-l(m_2-1)}{k} = (q_1-q_2)l$ или $m_1 - m_2 = k(q_1-q_2)$, откуда $m_1 \equiv m_2 \pmod{k}$. Но $0 \le m_1, m_2 \le k-1$, значит, $m_1 = m_2$. Инъективность τ доказана.

Итак, τ – биекция. Покажем сохранение n–арной операции при действии τ. Пусть $(m_i,u_i) \in P$ и $\tau((m_i,u_i)) = (u_i,v_i)$, где $\frac{l(m_i-1)-(n-1)u_i}{k} \equiv v_i \pmod{l}$, $0 \le v_i \le l-1$ для $i = 1,\dots,n$. Тогда

$$\begin{gathered}\tau(f_2((m_1,u_1),\dots,(m_n,u_n))) = \\ = \tau((m_1+\dots+m_n, u_1+\dots+u_n+l)) = , \\ = (u_1+\dots+u_n+l, v)\end{gathered}$$

где

$$\frac{l(m_1+\dots+m_n-1)-(n-1)(u_1+\dots+u_n+l)}{k} \equiv v \pmod{l},$$

$$(f_1(u_1,\dots,u_n), f_3(v_1,\dots,v_n)) = (u_1+\dots+u_n+l, v_1+\dots+v_n).$$

Кроме того, $$v_1+\ldots+v_n\equiv\frac{l(m_1-1)-(n-1)u_1}{k}+\ldots+\frac{l(m_n-1)-(n-1)u_n}{k}\pmod{l}$$

или

$$v_1+\ldots+v_n\equiv\frac{l(m_1+\ldots+m_n-n)-(n-1)(u_1+\ldots+u_n)}{k}\pmod{l}.$$

Тогда $v_1+\ldots+v_n\equiv v\pmod{l}$, значит, τ n–арную операцию. Итак, имеем изоморфизм n–арных групп: $\langle P,f_2\rangle\cong\langle Z_k,f_1\rangle\times\langle Z_l,f_3\rangle$.

На n-арной группе $\langle Z_k,f_1\rangle\times\langle Z_l,f_3\rangle$ построим (n, 2)–кольцо, введя на множестве $Z_k\times Z_l$ бинарную операцию $\bullet$ по правилу: если $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in Z_k\times Z_l$, то, как при доказательстве сюръективности τ (см. выше), имеем $m_1,m_2\in Z_k\times Z_l$, для которых

$$\tau((m_1,u_1))=(u_1,v_1),\ \tau((m_2,u_2))=(u_2,v_2)$$

и верны сравнения

$$m_1-1\equiv\frac{n-1}{l}u_1+v_1\frac{k}{l}\pmod{k}\ \text{и}$$

$$m_2-1\equiv\frac{n-1}{l}u_2+v_2\frac{k}{l}\pmod{k},\qquad(14)$$

тогда полагаем

$$(u_1,v_1)\bullet(u_2,v_2)=(u_3,v_3),$$

где $u_3\equiv u_2m_1+u_1\pmod{k}$, $v_3\equiv v_2m_1+v_1\pmod{l}$, $0\le u_3\le k-1$, $0\le v_3\le l-1$. Кроме того, имеем $m_3\in Z_k$ такое, что $\tau((m_3,u_3))=(u_3,v_3)$ и $m_3-1\equiv\frac{n-1}{l}u_3+v_3\frac{k}{l}\pmod{k}$. Заметим, что если второе сравнение из (14) умножить на m_1 и сложить с первым сравнением из (14), то получим

$$m_1m_2-1\equiv\frac{n-1}{l}(u_2m_1+u_1)+(v_2m_1+v_1)\frac{k}{l}\pmod{k}\ \text{и}$$

$$\tau((m_1,u_1)\Omega(m_2,u_2))=\tau((m_1,u_1))\bullet\tau((m_2,u_2)).\qquad(15)$$

Тогда с помощью (15) доказывается ассоциативность $\bullet$ и оба закона дистрибутивности операции $\bullet$ относительно операции из n–арной группы $\langle Z_k,f_1\rangle\times\langle Z_l,f_3\rangle$. Значит, $\langle\langle Z_k,f_1\rangle\times\langle Z_l,f_3\rangle,\bullet\rangle$ — (n, 2)–кольцо, а τ — изоморфизм из (n, 2)–кольца $\langle P,f_2,\Omega\rangle$ в это (n, 2)–кольцо. Тогда имеем изоморфизм (n, 2)–колец

$$\langle End\langle Z_k,f_1\rangle,f,\mathrm{o}\rangle\cong\langle\langle Z_k,f_1\rangle\times\langle Z_l,f_3\rangle,\bullet\rangle.$$

Заметим, что если $l=1$, то n–арная группа $\langle Z_l,f_3\rangle$ будет одноэлементной, тогда $\langle Z_k,f_1\rangle\times\langle Z_l,f_3\rangle\cong\langle Z_k,f_1\rangle$, а операция $\bullet$ $Z_k\times Z_l$ соответствует при этом изоморфизме операции $*$ на Z_k из примера 2. Это показывает согласованность полученных результатов примера 2 и примера 4 для $l=1$.

Теоремы об изоморфизмах для абелевых полуциклических n–арных групп

Как и в группах, у изоморфных абелевых n–арных групп (n,2)–кольца эндоморфизмов изоморфны, более того, верна

Теорема 11. *Изоморфизм φ абелевых n–арных групп $\langle A,f_1\rangle$ и $\langle B,f_2\rangle$ индуцирует изоморфизм τ (n, 2)–колец эндоморфизмов $\langle End\langle A,f_1\rangle,f,\mathrm{o}\rangle$ и $\langle End\langle \mathrm{B},f_2\rangle,f,\mathrm{o}\rangle$, который определяется по формуле $\tau:\alpha\to\varphi^{-1}\mathrm{o}\,\alpha\,\mathrm{o}\,\varphi$.*

Доказательство. Проверяется непосредственно. Обратное утверждение неверно, т.е. из изоморфизма (n, 2)–колец эндоморфизмов абелевых n–арных групп в общем случае не следует изоморфизм n–арных групп. Однако для конечных абелевых полуциклических n–арных групп это верно (см. ниже теорему 13). В следующей теореме найдены условия изоморфизма (n, 2)–колец эндоморфизмов для бесконечных абелевых полуциклических n–арных групп, т.е. верна

Теорема 12. *Две бесконечные абелевы полуциклические n–арные группы типов (∞,l_1) и (∞,l_2), где $0\le l_1,l_2\le\left[\frac{n-1}{2}\right]$, имеют изоморфные (n, 2)–кольца эндоморфизмов тогда и только тогда, когда $НОД(n-1,l_1)=НОД(n-1,l_2)$.*

Доказательство. Абелева полуциклическая n–арная группа типа (∞,l_1) изоморфна n–арной группе $\langle Z,f_1\rangle=der_{l_1}Z$, построенной на аддитивной группе целых чисел Z (см. теорему 7). Согласно теореме 11 (n, 2)–кольца эндоморфизмов этих n–арных групп изоморфны и, согласно примеру 3, изоморфны (n, 2)–кольцу $\langle Z,f_3,*\rangle$, где n–арная операция f_3 действует по правилу $f_3(x_1,\ldots,x_n)=x_1+\ldots+x_n+d_1$, где $d_1=НОД(n-1,l_1)$, причем d_1, также как и l_1, удовлетворяет условию $0\le d_1\le\left[\frac{n-1}{2}\right]$, и бинарная операция $*$ действует по правилу $z_1 * z_2 = z_1 z_2 t_1 + z_1 + z_2$, где $t_1 = \frac{n-1}{d_1}$.

Аналогично вторая абелева полуциклическая n–арная группа типа (∞, l_2) изоморфна n–арной группе $\langle Z, f_1' \rangle = der_{l_2} Z$, построенной на аддитивной группе целых чисел Z, и их (n, 2)–кольца эндоморфизмов изоморфны (n, 2)– кольцу $\langle Z, f_3', *' \rangle$, где n–арная операция f_3' действует по правилу $f_3'(x_1, ..., x_n) = x_1 + ... + x_n + d_2$, где $d_2 = НОД(n-1, l_2)$, причем $0 \le d_2 \le \left[\frac{n-1}{2}\right]$, и бинарная операция $*'$ действует по правилу $z_1 *' z_2 = z_1 z_2 t_2 + z_1 + z_2$, где $t_2 = \frac{n-1}{d_2}$.

Если имеем изоморфизм (n, 2)–колец $\langle Z, f_3, * \rangle$ и $\langle Z, f_3', *' \rangle$, то их абелевы n–арные группы также изоморфны, т.е. $\langle Z, f_3 \rangle \cong \langle Z, f_3' \rangle$, откуда, в силу их полуцикличности и согласно теореме 7, получим $d_1 = d_2$.

Обратно, если $d_1 = d_2$, то действия операций f_3 и f_3' совпадают, кроме того, совпадают и действия операций $*$ и $*'$, так как $t_1 = t_2$. Тогда имеем равенство (n, 2)–колец $\langle Z, f_3, * \rangle$ и $\langle Z, f_3', *' \rangle$, а значит, две бесконечные абелевы полуциклические n–арные группы типов (∞, l_1) и (∞, l_2) имеют изоморфные (n, 2)–кольца эндоморфизмов. Теорема доказана.

Следствие 1. *Бесконечная циклическая n–арная группа имеет (n, 2)–кольцо эндоморфизмов, изоморфное (n, 2)–кольцу эндоморфизмов абелевой полуциклической n–арной группы типа* (∞, l), *где* $0 \le l \le \left[\frac{n-1}{2}\right]$, *тогда и только тогда, когда* l *и* $n-1$ *взаимно просты.*

Теорема 13. *Две конечные абелевы полуциклические n–арные группы, имеющие изоморфные (n, 2)–кольца эндоморфизмов, изоморфны.*

Доказательство. Любая конечная абелева полуциклическая n–арная группа порядка k изоморфна n–арной группе $\langle Z_k, f_1 \rangle = der_l Z_k$, построенной на аддитивной группе кольца классов вычетов Z_k, где $l \mid НОД(n-1, k)$ (см. теорему 8).

Пусть заданные две конечные абелевы полуциклические n–арные группы изоморфны n–арным группам $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle = der_{l_1} Z_{k_1}$ и $\langle Z_{k_2}, f_1' \rangle = der_{l_2} Z_{k_2}$ соответственно, где $l_1 \mid НОД(n-1, k_1)$, $l_2 \mid НОД(n-1, k_2)$. Согласно теореме 11, n–арные группы $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle$ и $\langle Z_{k_2}, f_1' \rangle$ имеют изоморфные (n, 2)–кольца эндоморфизмов, т.е.

$$\left\langle End\left\langle Z_{k_1}, f_1 \right\rangle, f, \mathrm{o} \right\rangle \cong \left\langle End\left\langle Z_{k_2}, f_1' \right\rangle, f, \mathrm{o} \right\rangle.$$

Тогда, согласно примеру 4, имеем изоморфизм $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle \times \langle Z_{l_1}, f_3 \rangle \cong \langle Z_{k_2}, f_1' \rangle \times \langle Z_{l_2}, f_3' \rangle$.

У n–арной группы $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle \times \langle Z_{l_1}, f_3 \rangle$ редуктом будет прямая сумма $Z_{k_1} + Z_{l_1}$ (проверяется непосредственно по теореме 2 для $c = (0,0)$, тогда, по равенству (3), имеем $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle \times \langle Z_{l_1}, f_3 \rangle = der_{l_1}(Z_{k_1} + Z_{l_1})$. Аналогично $\langle Z_{k_2}, f_1' \rangle \times \langle Z_{l_2}, f_3' \rangle = der_{l_2}(Z_{k_2} + Z_{l_2})$. По теореме 3 имеем изоморфизм конечных абелевых групп

$$Z_{k_1} + Z_{l_1} \cong Z_{k_2} + Z_{l_2}.$$

Согласно условию, $l_1 \mid k_1$ и $l_2 \mid k_2$, тогда, в силу однозначной разложимости конечной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических групп, получим $Z_{k_1} \cong Z_{k_2}$ и Z_{k_1} $Z_{l_1} \cong Z_{l_1}$, т.е. $k_1 = k_2$ и $l_1 = l_2$. Откуда следует изоморфизм n–арных групп $\langle Z_{k_1}, f_1 \rangle$ и $\langle Z_{k_2}, f_1' \rangle$.

Значит, рассматриваемые в теореме конечные абелевы полуциклические n–арные группы изоморфны. Теорема доказана.

Следствие 2. *Две конечные циклические n–арные группы, имеющие изоморфные (n, 2)–кольца эндоморфизмов, изоморфны.*

Литература

1. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 уч. года. М. Наука. 1974.
2. Dornte W. Untersuchungen uber ainen verallgemeinerten Gruppenbegrief. Math. Z. 29. 1928 P. 1–19.
3. E. L. Post Poluadic groups. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 48. 1940. P. 208–350.
4. Сушкевич А.К. Теория обобщенных групп. Харьков – Киев. Хозтехиздат. 1937.
5. Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы. Минск. Навука і техніка. 1992.
6. Гальмак А.М. n-Арные группы. Часть 1. Гомель. Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины. 2003.

7. Гальмак А.М. n-Арные группы. Часть 2. Минск. Издательский центр БГУ. 2007.

8. W. Dudek, K. Glazek, B. Gleichgewicht. A note on the axioms of n-groups. Coll. Math. Soc. J. Bolyai. vol. 29. 1977. P. 195–202.

9. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т 1. М. Мир. 1974.

10. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т 2. М. Мир. 1977.

11. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М. ФАКТОРИАЛ ПРЕСС. 2006.

12. J. Timm. Kommutative n-Gruppen. Hamburg. Diss. 1967.

13. Глускин Л. М. Позиционные оперативы. Мат. сборник. vol 68(110), є3. 1965. P. 444–472.

14. M. Hosszu. On the explicit form of n-group operacions. Publ.Math. vol. 10. є1-4. 1963. P. 88–92.

15. W. A. Dudek, J. Michalski. On retrakts of polyadic groups. Demonstratio Math. vol. 17. 1984 P. 281–301.

16. Щучкин Н.А. Полуциклические n-арные группы. Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 3 (54). 2009. С. 186–194.

17. K. Glazek, J. Michalski, I. Sierocki A. On evaluation of some polyadic groups. Variag Holder-Pichier-Tempsky. 1985. P. 159–171.

18. G. Crombez. On (n,m)-rings. Abh. Math, Sem.Univ. Hamburg. vol. 37. 1972. P. 180–199.

19. K. Glazek, B. Gleichgewicht. Abelian n-groups. Proc. Congr. Math. Soc. J.Bolyai Esztergom (Hungaru). vol. 29. 1977. P. 321–329.

***Кусов В. М., Щучкин Н. А.* Эндоморфизмы абелевых полуциклических n–арных групп.** *Приведено полное описание строения* $(n,2)-$ *колец эндоморфизмов конечных и бесконечных абелевых полуциклических* $n-$ *арных групп. Доказан* $n-$ *арный аналог теоремы Бера–Капланского для конечных абелевых полуциклических* $n-$ *арных групп. Найдены условия изоморфизма* $(n,2)-$ *колец эндоморфизмов для бесконечных абелевых полу-циклических n-арных групп.*

Ключевые слова: *абелева* $n-$ *арная группа, эндоморфизм, полуциклическая* $n-$ *арная группа,* $(n,2)-$ *кольцо.*

Kusov V. M., Shchuchkin N. A. Endomorphisms of abelian semicyclic n-ary groups. *A complete description of the structure of endomorphism* $(n,2)-$ *rings of finite and infinite Abelian semicyclic n-groups is given. An analogue of the Beer-Kaplansky theorem for finite Abelian semicyclic n-groups is proved. Conditions for the isomorphism of endomorphism* $(n,2)-$ *rings for infinite abelian semicircular n-ary groups are found.*

Keywords: *abelian n-ar group, endomorphism, semicyclic n-ar group, (n,2)-ring.*

Статья поступила в редакцию 22.02.2018
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко