УДК 512.579

О конгруэнциях полигонов над прямоугольными связками

И.Б. Кожухов, А.М. Пряничников
МИЭТ, Москва
kozhuhov_i_b@mail.ru , genary@yandex.ru

Кожухов И.Б., Пряничников А.М. О конгруэнциях полигонов над прямоугольными связками. *Строится серия конгруэнций полигона над прямоугольной связкой. При определённых условиях ими исчерпываются все конгруэнции полигона. Результаты предполагается применить в исследовании полигонов с условиями на конгруэнции.*

Ключевые слова: *полигон над полугруппой, прямоугольная связка, решётка конгруэнций.*

В данной работе рассматриваются конгруэнции полигонов над полугруппами. Напомним, что полугруппой называется множество с одной бинарной ассоциативной операцией (т.е. $(ab)c = a(bc)$ для любых элементов a, b, c). Полигон над полугруппой – это множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, (x, s) а xs такое, что $(xs)t = x(st)$ для всех $s, t \in S$, $x \in X$ (см. [1]). Полигон является алгебраической моделью автомата (см. [2]), при этом X – множество состояний, а S – полугруппа входных сигналов.

Если полугруппа имеет относительно простое строение, то все полигоны над ней могут быть описаны. В работе [3] были описаны полигоны над вполне простой $\mathrm{M}(G, I, \Lambda, P)$ и полигоны с нулём над вполне 0-простой $\mathrm{M}^0(G, I, \Lambda, P)$ полугруппой (определения и обозначения см. в [4, гл.3]). Описание конгруэнций над этими полугруппами представляет собой более трудную задачу. В частных случаях полугрупп левых или правых нулей это было сделано в работах [5], [6]. А именно, в теореме 2 работы [5] были описаны конгруэнции полигона над полугруппой левых нулей, а теорема 5 работы [6] даёт описание конгруэнций над полугруппой правых нулей. Следует отметить, что эти описания достаточно громоздки, и в ряде ситуаций (например, для описания полигонов с модулярной решёткой конгруэнций) описания конгруэнций в такой общности, как это получено в работах [5,6], обычно не требуется ввиду наличия дополнительных условий на конгруэнции.

В работе [7] были исследованы условия, при которых решётка $\mathrm{Con}\, X$ конгруэнций полигона X (над произвольной полугруппой) является модулярной или дистрибутивной. Важную роль для модулярности решётки конгруэнций полигона играла модулярность решёток конгруэнций компонент связности полигона и отсутствие так называемых сквозных конгруэнций (наличие их исключает модулярность). В работе [5] были полностью описаны полигоны над полугруппой правых или левых нулей с модулярной или дистрибутивной решёткой конгруэнций. Эти результаты, на наш взгляд, могут быть обобщены по крайней мере на полигоны над прямоугольными связками. Если X – полигон над прямоугольной связкой S, то нетрудно показать, что в случае модулярности решётки $\mathrm{Con}\, X$ множество $A = X \setminus XS$ состоит не более, чем из двух элементов. Полигоны над прямоугольной связкой, имеющие модулярную решётку конгруэнций, были описаны в работе [8] в случаях, когда $A = \varnothing$ или $|A| = 1$. Таким образом, неразобранным остаётся лишь случай, когда $|A| = 2$.

Цель данной работы – пстроить некоторые конгруэнции полигона над прямоугольной связкой, которые в дальнейшем помогут получить ограничения на полигон в случае модулярности, или дистрибутивности, или каких-либо других условий на решётку его конгруэнций.

Напомним некоторые определения, необходимые для дальнейшего.

Полугруппа правых нулей R – полугруппа, в которой $ab = b$ для любых $a, b \in R$. Аналогично этому в *полугруппе левых нулей* $ab = a$. *Прямоугольная связка* – это прямое произведение полугруппы левых нулей на полугруппу правых нулей: $S = L \times R$. Иными словами, прямоугольная связка – это множество пар (l, r), где $l \in L$, $r \in R$, с умножением

$(l,r)\cdot(l',r')=(l,r')$.

Конгруэнцией полигона X над полугруппой S называется такое отношение эквивалентности ρ на множестве X, что $(x,y)\in\rho \Rightarrow (xs,ys)\in\rho$ для всех $x,y\in X$, $s\in S$. Решётку конгруэнций полигона X обозначим $\operatorname{Con} X$.

Копроизведением $\coprod_{i\in I} X_i$ семейства полигонов $\{X_i \mid i\in I\}$ над полугруппой S назовём дизъюнктное объединение этих полигонов (если X_i имеют между собой непустые пересечения, то возьмём их изоморфные попарно не пересекающиеся копии).

Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S=L\times R$. Положим $Y=XS$. Нетрудно проверить, что для любых $y\in Y$, $l,l'\in L$, $r\in R$ имеет место равенство $y\cdot(l,r)=y\cdot(l',r)$, т.е. произведение не зависит от l. Это означает, что множество Y можно рассматривать как полигон над полугруппой правых нулей R. Конгруэнции полигона Y одни и те же, если его рассматривать как R-полигон или как S-полигон. Кроме того, решётка конгруэнций полигона Y изоморфно вкладывается в решётку $\operatorname{Con} X$ следующим образом: $\rho \mapsto \rho\cup\Delta_X$, где $\rho\in\operatorname{Con} Y$, $\Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$ – отношение равенства на X.

Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S=L\times R$ и $Y=XS$. Как отмечалось ранее, Y является одновременно R- и S-полигоном, причём $\operatorname{Con} Y_R=\operatorname{Con} Y_S$. Разложим Y в копроизведение конеразложимых полигонов: $Y=\coprod_{i\in I} Y_i$. Можно проверить, что $Y_i=aS$ для любого $a\in Y_i$ и $|Y_i r|=1$ для всех $r\in R$. Пусть $Y_i r=\{y_{ir}\}$. Для $i,j\in I$ и $i\neq j$ обозначим через Γ_{ij} двудольный граф с множеством вершин $Y_i\cup Y_j$ (Y_i и Y_j – его доли) и рёбрами (y_{ir},y_{jr}) при $r\in R$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S=L\times R$,, $XS=\coprod_{i\in I} Y_i$ – разложение подполигона XS в копроизведение конеразложимых подполигонов и $\rho\in Con\,X$. Пусть $(y,y')\in\rho$ для некоторых $y\in Y_i$, $y'\in Y_j$, причём $i\neq j$. Если граф Γ_{ij} связен, то все элементы множества $Y_i\cup Y_j$ лежат в одном ρ-классе.*

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Достаточно доказать, что $(z,z')\in\rho$ при любых $z\in Y_i$, $z'\in Y_j$. По условию $(y,y')\in\rho$. Умножив на любое $r\in R$, получим $(yr,y'r)\in\rho$, т.е. $(y_{ir},y'_{ir})\in\rho$. Так как граф Γ_{ij} связен, то в нём существует путь от y к z'. Ввиду симметричности и транзитивности отношения ρ мы получаем, что $(y,z')\in\rho$. Ввиду произвольности элемента $z'\in Y_j$ мы получаем, что все элементы множества Y_j лежат в одном ρ-классе с элементом y. Аналогично доказывается, что все элементы из Y_i лежат в одном ρ-классе с элементом y'. Отсюда следует, что $(z,z')\in\rho$.

Для любого множества A через $\operatorname{Eq} A$ будем обозначать решётку отношений эквивалентности на множестве A.

Теорема. *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S=L\times R$, $XS=\coprod_{i\in I} Y_i$ – разложение подполигона XS в копроизведение конеразложимых подполигонов Y_i. Возьмём любое $\sigma\in\operatorname{Eq} I$. Далее, возьмём какое-либо подмножество $I'\subseteq I$, состоящее из элементов, σ-классы которых одноэлементны (возможно, $I'=\varnothing$). Для каждого $i\in I'$ возьмём любое $\sigma_i\in\operatorname{Eq} Y_i$. Положим $I''=I\setminus I'$. Тогда отношение*

$$\rho=\bigcup_{i\in I'}\sigma_i\cup\bigcup_{j\in I''}\left(\bigcup_{\substack{i\in I''\\(i,j)\in\sigma}} Y_i\times\bigcup_{\substack{i\in I''\\(i,j)\in\sigma}} Y_i\right) \tag{1}$$

является конгруэнцией полигона $Y=XS$. Кроме того, если все графы Γ_{ij} связны, то любая конгруэнция полигона Y имеет вид (1).

Доказательство. Докажем вначале, что отношение ρ является конгруэнцией. Ясно, что ρ – отношение эквивалентности. Нужно доказать, что $(xs,ys)\in\rho$ при $(x,y)\in\rho$ и $s=(l,r)\in S$. Если $(x,y)\in\sigma_i$, то $x,y\in Y_i$, а значит, $xs=ys$ (левая и правая части равны y_{ir}), откуда $(xs,ys)\in\rho$. Пусть теперь $x,y\in\bigcup_{(i,j)\in\sigma} Y_i$

для некоторого $j \in I''$. Так как Y_i – подполигоны полигона X, то $xs, ys \in \bigcup_{(i,j)\in\sigma} Y_i$, следовательно, $(xs, ys) \in \rho$.

Предположим теперь, что графы Γ_{ij} связны и $\rho \in \operatorname{Con} Y$. Введём в рассмотрение отношение $\sigma = \{(i,j) \in I \times I \mid (X_i \times X_j) \cap \rho \neq \varnothing\}$ на множестве I. Проверим, что $\sigma \in \operatorname{Eq} I$. Рефлексивность и симметричность отношения ρ очевидны. Пусть $(i,j),(j,k) \in \sigma$. Тогда $(x,y),(y',z) \in \rho$ при некоторых $x \in Y_i$, $y, y' \in Y_j$, $z \in Y_k$. Если $i = j$ или $j = k$, то ясно, что $(i,k) \in \sigma$. Далее считаем, что $i \neq j$ и $j \neq k$. Так как граф Γ_{ij} связен, то по лемме $Y_i \times Y_j \subseteq \rho$. Из связности графа Γ_{jk} аналогично получаем, что $Y_j \times Y_k \subseteq \rho$. Транзитивность отношения ρ даёт включение $Y_i \times Y_k \subseteq \rho$. Таким образом, σ транзитивно. Следовательно, $\sigma \in \operatorname{Eq} I$.

Пусть $I' = \{i \in I \mid (Y_i \times Y_j) \cap \rho = \varnothing$ при $j \neq i\}$. Тогда для каждого $i \in I'$ его σ-класс состоит из одного элемента i. Для $i \in I'$ положим $\sigma_i = \rho \cap (Y_i \times Y_i)$. Ясно, что $\sigma_i \in \operatorname{Eq} Y$.

Положим $I'' = I \setminus I'$. Тогда при $i \in I''$ существуют элементы x, y такие, что $x \in Y_i$, $y \in Y_j$ при некотором $j \neq i$ и $(x,y) \in \rho$. Так как граф Γ_{ij} связен, то по лемме $Y_i \times Y_j \subseteq \rho$. При этом, очевидно, $(i,j) \in \sigma$. Наоборот, если $(i,j) \in \sigma$ и $i \neq j$, то $i, j \notin I'$ и $Y_i \times Y_j \subseteq \rho$. Следовательно, $i, j \in I''$. Теперь ясно, что ρ имеет вид (1).

Эта теорема позволяет сделать интересное замечание. Пусть $X = XS$. Если все графы $y \in \Gamma_{ij}$ связны, то решётка конгруэнций $\operatorname{Con} X$ *не зависит* от вида этих графов (важен лишь сам факт их связности).Решётка конгруэнций зависит лишь от мощностей $|Y_i|$ конеразложимых компонент.

Прежде, чем привести пример решётки конгруэнций полигона в целях упрощения записи конгруэнций введём следующие обозначения. Если τ – отношение эквивалентности на множестве X и $\{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$, $\{x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2}\}$, … , $\{x_{n_{k-1}+1}, \ldots, x_{n_k}\}$ – её классы, то будем писать $\tau = (x_1, \ldots, x_{n_1})(x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2}) \ldots (x_{n_{k-1}+1}, \ldots, x_{n_k})$.

При этом элементы одноэлементных классов можно вообще не писать. Например, запись $\tau = (123)(45)(67)$ означает, что $\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7\}$ – классы отношения τ, а остальные классы одноэлементны.

Для любого полигона X отношение $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ (отношение равенства) и отношение $\nabla = X \times X = \{(x,y) \mid x, y \in X\}$ (универсальное отношение) являются конгруэнциями, причём Δ – наименьший элемент решётки $\operatorname{Con} X$, а ∇ – её наибольший элемент.

Пример. *Пусть* $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ *– полигон над прямоугольной связкой* S, *причём* $X = XS$ *и* $Y_1 = \{1,2,3\}$, $Y_2 = \{4,5\}$, $Y_3 = \{6,7\}$ *– его конеразложимые подполигоны. Тогда множество*

$C = \{\Delta$, (12), (13), (23), (123), (45), (12)(45), (13)(45), (23)(45), (123)(45), (67), (12)(67), (13)(67), (23)(67), (123)(67), (12)(45)(67), (13)(45)(67), (23)(45)(67), (123)(45)(67), (4567), (12)(4567), (13)(4567), (23)(4567), (123)(4567), (12345), ((12367), (12345)(67), (12367)(45), ∇ } *является подрешёткой решётки конгруэнций полигона* X. *Если графы* $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}$ *связны, то других конгруэнций нет, т.е.* $\operatorname{Con} X = C$.

Решётка C изображена на рисунке 1.

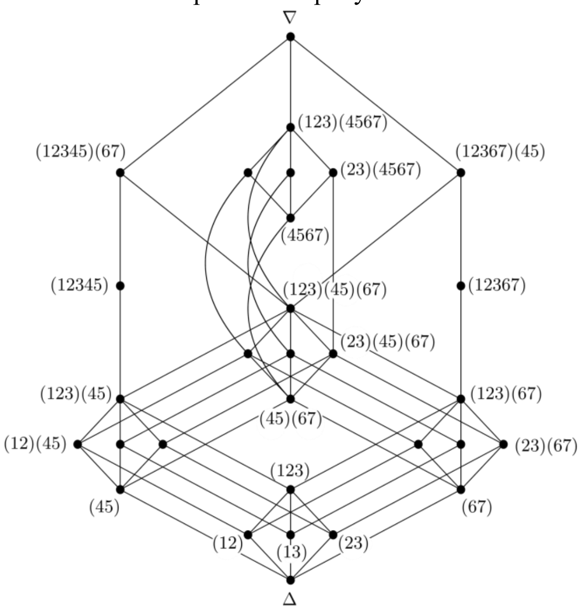

Рисунок 1 - Решётка C

Литература

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. *Monoids, Acts and Categories*. N.Y. – Berlin,

Walter de Gruyter, 2000.

2. Плоткин Б.И., Гварамия А.А., Гринглаз Л.Я. *Элементы алгебраической теории автоматов*. М., Высшая школа, 1994.

3. Avdeyev A.Yu., Kozhukhov I.B. Acts over completely 0-simple semigroups. *Acta Cybernetica*, 2000, т. 14, вып. 4, с. 523–531.

4. Престон Г., Клиффорд А. *Алгебраическая теория полугрупп*. Тт. 1, 2. М., Мир, 1972, 1974.

5. Халиуллина А.Р. Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей. *Дальневосточный математический журнал*, 2015, т. 15, вып. 1, С. 102–120.

6. Халиуллина А.Р.. Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей. *Чебышевский сборник*, 14(3):142–146, 2013.

7. Птахов Д.О., Степанова А.А. Решётки конгруэнций полигонов. *Дальневосточный математический журнал*, 2013, т. 13, вып. 1, с. 107–115.

8. Кожухов И.Б., Халиуллина А.Р. О решётке конгруэнций полигонов над прямоугольными связками. *Сб. научн. трудов МИЭТ, посв. 70-летию проф. А.С.Поспелова,* М., МИЭТ, 2016, С. 75–82.

Кожухов И.Б., Пряничников А.М. О конгруэнциях полигонов над прямоугольными связками. *Строится серия конгруэнций полигона над прямоугольной связкой. При определённых условиях ими исчерпываются все конгруэнции полигона. Результаты предполагается применить в исследовании полигонов с условиями на конгруэнции.*

Ключевые слова: *полигон над полугруппой, прямоугольная связка, решётка конгруэнций.*

Kozhukhov I.B., Pryanichnikov A.M. On congruences of acts over rectangular bands. *We construct a series of congruences of an act over a rectangular bund. Under certain conditions, they are all the congruences of the act. We hope to apply the result in the study of acts with conditions on congruences.*

Keywords: *act over semigroup, rectangular band, congruence lattice.*

Статья поступила в редакцию 22.02.2018
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат. наук А.С. Миненко