УДК 51-7, 519.688

Применение полиномов наилучшего равномерного приближения в оценке и анализе экономических явлений

И.А. Козлова
Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского
irena1983.83@mail.ru

Козлова И.А. Применение полиномов наилучшего равномерного приближения в оценке и анализе экономических явлений. *В настоящей работе представлено построение наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка, которую с экономической точки зрения можно рассматривать как модель финансового рынка - двойной зигзаг. Метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения данной функции, а также нахождение максимального отклонения полученной аппроксимации осуществляется с помощью разработанной "Программы, реализующей метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка". Программа разработана в среде MatLab и строит полиномы наилучшего равномерного приближения по заданному параметру функции Бланка и порядку аппроксимирующего многочлена, вычисляет максимальное отклонение полученного приближения и значение полинома в любой точке. В основе работы программы заложено нахождение чебышевского альтернанса.*

Ключевые слова: *фрактальная функция, наилучшее равномерное приближение, двойной зигзаг.*

Введение

Многие экономические явления описываются с помощью фрактальных моделей [1], однако, изучение фрактальных функций затруднительно из-за инвариантности их масштаба и недифференцируемости, поэтому для прогнозирования и анализа экономических категорий используется полиномиальная линия тренда. Наиболее распространенным методом приближения функций полиномами является метод наименьших квадратов. Данный метод основан на минимизации среднеквадратичного отклонения аппроксимирующего полинома от аппроксимируемой функции, но он не гарантирует значительных локальных ошибок [2]. Для предотвращения подобной возможности используют полиномы наилучшего равномерного приближения, однако не известны ни общий вид многочленов наилучших равномерных приближений, ни способы их построения, поэтому среднеквадратическая мера близости применяется вместо более сложной чебышевской. Решение задачи чебышевского приближения всегда дает примерно туже среднеквадратическую погрешность, что и решение задачи наилучшего среднеквадратического приближения, однако наилучшее среднеквадратическое приближение дает максимальную абсолютную погрешность, значительно превышающую погрешность чебышевского приближения. Чебышевское приближение определят ошибку в каждой точке интервала аппроксимации и ни в одной точке такого интервала ошибка не превышает максимальной чебышевской меры.

Термин «фракталы» впервые ввел Бенуа Мандельброт, математик, изучавший применение фракталов на финансовых рынках [3, 4], а Р.Н. Эллиотта создал волновую теорию, согласно которой поведение цены на рынке происходит волнообразно и имеет определенную фрактальную структуру [5]. Описание Эллиоттом движений финансового рынка, подчиняющегося обычным математическим законам прогрессии, позволяет путем изучения исторических данных поведения рыночных цен оценивать текущее состояние рынка и будущие экономические проявления. Одной из наиболее распространенных моделей финансового рынка является двойной зигзаг. В частности промышленный индекс Доу-Джонса представляет собой фрактальную модель – двойной зигзиг. С математической точки зрения двойной зигзаг представляет собой функцию Бланка.

Целью данной работы является построения полиномов наилучшего равномерного приближения функции двойного зигзага. Для построения полиномов наилучшего равномерного приближения графика двойного зигзага, а также нахождение максимального отклонения полученной аппроксимации применяется "Программа, реализующая метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка". Данная программа строит полиномы наилучшего равномерного приближения по заданному параметру функции Бланка (графика двойного зигзага) и порядку аппроксимирующего многочлена. Построения полиномов наилучшего равномерного приближения показано на примере аппроксимации графика индекса Доу-Джонса на заданном отрезке.

Построение функции Бланка

Функция Бланка определяется как предел последовательности ломаных [6]. Пусть точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – последовательные вершины некоторой ломаной, где $x_1 < x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Пусть $h = \frac{x_2 - x_1}{3}$ и пусть $k = \lambda(y_2 - y_1)$, где λ – положительная константа. Следующая ломаная заменяет отрезок, соединяющий точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), зигзагообразной линией, содержащей последовательные вершины

$$(x_1, y_1), (x_1 + h, y_2 - k), (x_2 - h, y_1 + k), (x_2, y_2).$$

Разности ординат последовательных вершин будут равны

$$(1-\lambda)(y_2 - y_1), (2\lambda - 1)(y_2 - y_1), (1-\lambda)(y_2 - y_1).$$

Для построения функции Бланка с помощью последовательных приближений зафиксируем $0 < \lambda < \frac{1}{3}$. Начнём с отрезка прямой $y = x$, где $0 \le x \le 1$. Первая аппроксимирующая функция $f_1(x)$ представляет собой ломаную, строящуюся вышеупомянутым способом. Вторая аппроксимирующая функция $f_2(x)$ получается из первой с помощью построения ломаной той же конструкции на каждом отрезке $\frac{i}{3} \le x \le \frac{i+1}{3}$, $(i = 0, 1, 2)$. Повторим схему применения зигзагообразных конструкций для каждого отрезка аппроксимирующей функции $f_2(x)$, чтобы получить следующую аппроксимацию. Рисунок 1 показывает картину аппроксимирующей функции $f_3(x)$ для $\lambda = \frac{1}{4}$. Абсциссы последовательных вершин n-ой аппроксимирующей функции будут в точках $x_{n,i} = \frac{i}{3^n}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 3^n)$, а так как эти вершины будут вершинами для всех последующих ломаных, то они принадлежат графику некоторой предельной функции Бланка $f(x)$. Тем самым функция Бланка f определена во всех тернарных точках $x_{n,i}$, затем эта функция определяется как непрерывное продолжение f на все точки отрезка $[0, 1]$.

Появляется модель, напоминающая ценовые колебания, отражающая последовательные изменения цен от времени 0 к более позднему времени 1 [7].

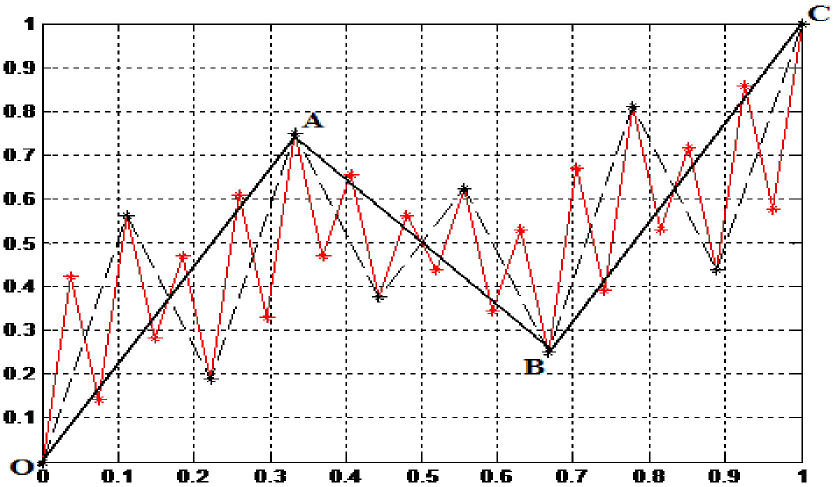

Рисунок 1 – Схема построения вспомогательных функций Бланка $f_1(x)$(жирная линия), $f_2(x)$ (пунктирная линия) и $f_3(x)$

Сами интервалы выбраны произвольно; они могут представлять секунду, час, день или год. Процесс начинается с цены, представленной прямой линией тренда (на рисунке 1 можно провести отрезок ОС). Затем используется ломаная линия – генератор - чтобы создать модель, которая соответствует колебаниям цены вверх и вниз. Генератор состоит из трех частей, которые интерполированы вдоль прямой линии тренда (генератор с меньшим количеством чем три, не смоделировал бы цену, которая может двигаться вверх и вниз). После прорисовки начального генератора, его три части интерполированы тремя более короткими. Повторение этих шагов воспроизводит форму генератора, или ценовую кривую, но в сжатых масштабах. И горизонтальная ось (шкала времени) и вертикальная ось (цена) сжаты, чтобы приспособить к горизонтальным и вертикальным границам каждую часть генератора.

Таким образом, с точки зрения экономики рисунок 1 является фрактальной моделью финансового рынка – двойным зигзагом, где по вертикальной оси показано изменение цен, а по горизонтальной оси – время. Двойной зигзаг - это коррекционная волновая модель, состоящая из двух зигзагов OA и BC, разделенных коррекционной волной-связкой AB и удовлетворяющая следующим условиям:

- длина волны AB всегда меньше длины волны OA;
- длина волны BC может быть больше длины волны OA;
- волны OA и BC являются действующими и стремятся между собой к равенству по длине и/или длительности.

В том случае, когда волны OA и BC равны между собой получаем функцию Бланка.

Аппроксимация фрактальной модели с помощью наилучшего равномерного приближения

Полиномы наилучшего равномерного приближения для функции Бланка находятся с помощью подбора чебышевского альтернанса [8].

Так как функция Бланка симметрична, чебышевский альтернанс образуют четное количество точек и поэтому многочлены наилучшего равномерного приближения будут нечетных степеней. Для построения многочленов наилучшего равномерного приближения данной функции получена закономерность нахождения чебышевского альтернанса в общем виде в зависимости от λ [9]. На основе полученной закономерности разработана "Программа, реализующая метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка» (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017660149, авторы: Козлова И.А., Степович М.А., Биленко А.А., Редько А.В.) по заданному параметру λ $\left(0<\lambda<\frac{1}{3}\right)$ и порядку многочлена n ($n \le 19$). Программа разработана в среде MatLab, также с помощью неё можно находить и максимальное отклонение полученной аппроксимации.

Преимуществом применения многочленов наилучшего равномерного приближения является аппроксимация графика двойного зигзага сразу во всех ценовых масштабах и с минимальной погрешностью приближения.

На рисунке 2 представлены в сравнении графики аппроксимации функции Бланка (двойного зигзага) полиномами первого и третьего порядков с помощью среднеквадратического приближения и наилучшего равномерного приближения (Чебышевского).

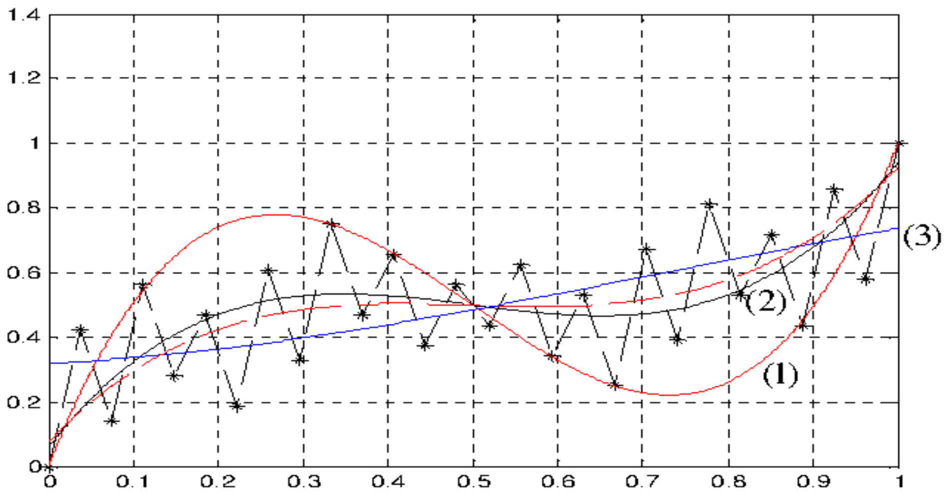

Рисунок 2 – Аппроксимация графика двойного зигзага полиномами третьего порядка: график наилучшего равномерного приближения – пунктирная линия; линия (1) – среднеквадратическое приближение, для построения которого использовались 3 точки; линия (2) – 10 точек; линия (3) – 27 точек

Рассмотрим пример построения полиномов наилучшего равномерного приближения для графика индекса Доу Джонса (рисунок 3). Для рассмотрения выберем ломаную с координатами (2; 100), (103; 190) и (204; 137) и являющийся моделью двойного зигзага.

Поставим в соответствие результаты исследования индекса Доу Джонса с функцией Бланка (двойного зигзага). Для этого отрезок [2; 305] (шкала недель) поставим в соответствие отрезку [0; 1] для функции Бланка. Данное соответствие будет находиться в прямой пропорциональной зависимости с коэффициентом $\frac{1}{303}$. По вертикальной оси координат (шкала цены) отрезку [100; 227] соответствует отрезок [0; 1] функции Бланка с коэффициентом пропорциональности $\frac{1}{127}$.

Получаем формулу преобразования координат

$$y = 100 + 127 f\left(\frac{1}{303}(x-2)\right),$$

где f - функция, задающая полином наилучшего равномерного приближения на отрезке [0; 1], $x \in [0; 1]$, а y - функция полинома наилучшего равномерного приближения на заданном отрезке [100; 227].

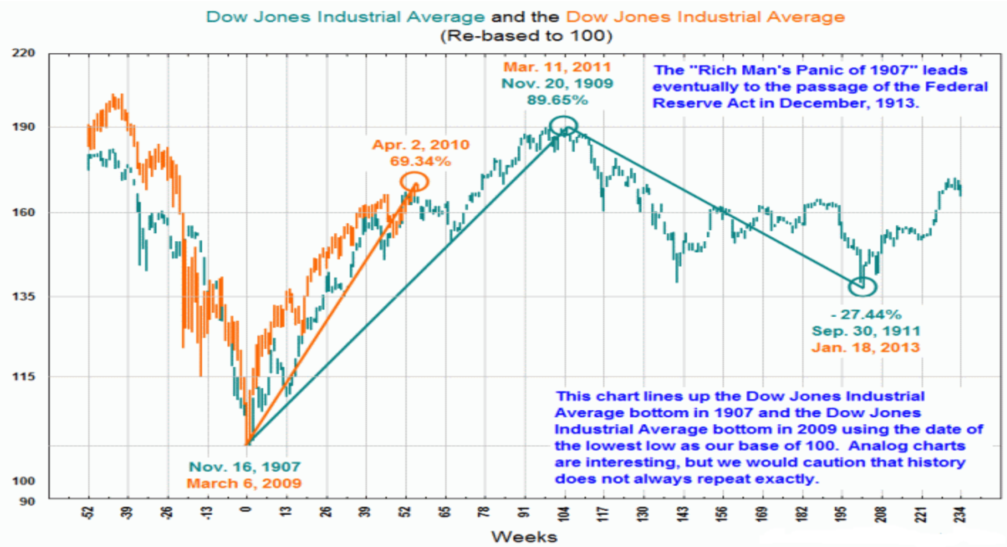

Рисунок 3 – График индекса Доу Джонса

Параметр λ находится из построения полученной модели и равен 37/127. С помощью программы, реализующей метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка получим, например, график полинома наилучшего равномерного приближения третьего порядка (рисунок 4):

$$y = 0{,}00001751x^3 - 0{,}008063x^2 + 1{,}2076x + 104{,}7305.$$

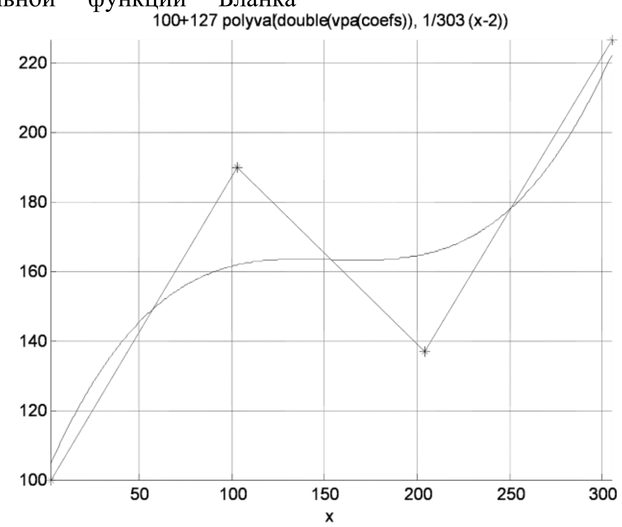

Рисунок 4 – Аппроксимация графика индекса Доу Джонса полиномом наилучшего равномерного приближения третьего порядка

Максимального отклонения полинома наилучшего равномерного приближения от графика индекса Доу Джонса составляет 27,2934.

С помощью разработанной "Программы, реализующей метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка" можно строить наилучшую равномерную аппроксимацию данной функции, получать коэффициенты построенного полинома в обыкновенных дробях или в десятичных с заданной степенью точности. Также данная программа показывает на графике точки чебышевского альтернанса, вычисляет максимальное отклонение полученного приближения, вычисляет значение полинома в любой точке. Осуществляя элементарные преобразования графика в программе можно строить аппроксимацию на любом заданном отрезке. В дальнейшем планируется разработать аналогичные программы для аппроксимации полиномами наилучшего равномерного приближения некоторых фрактальных моделей, применяемых в экономике и других областях (например, функция Больцано [10]).

Литература

1.Айвазян С.А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Кн. 1: справочное издание / С.А. Айвазян., С.А. Енюков, Л.Д. Мешалкин - М.: Финансы и статистика, 1983. - 471с.

2.Основы цифровой обработки сигналов / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева.- Санкт-Петербург: БВХ-Петербург, 2005.- 753с.

3.Мандельброт Б., Хадсон Р. Л. (Не) послушные рынки: фрактальная революция в финансах.: пер. с англ. / Б. Мандельброт, Р.Л. Хадсон. — М: "Вильяме", 2006. — 400 с.

4.Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: пер. с англ. / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

5.Пректер Р. Волновой принцип Элиота: Ключ к пониманию рынка. / Р. Пректер, А. Фрост. - М.: Ампина Паблишер, 2012. - 270с.

6.Blank A. A simple example of a Weierstrass function / A. Blank // Amer. Math. Monthly. - 1966. V 73, № 3. - P. 515-519.

7.Mandelbrot B. A Multifractal Walk down Wall Street / B. Mandelbrot // Scientific American. – 1999. - P. 70-73.

8.Привалов А. А. Теория интерполирования функций. Кн. 1 / А.А. Привалов. – Саратов: Сарат. ун-т, 1990. – 230 с.

9.Козлова И. А. Применение наилучшего равномерного приближения к анализу фрактальных моделей / И.А. Козлова // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. -2015. - №1 (41). - С. 54–59

10. Козлова И.А. Моделирование Броуновского движения с помощью функции Больцано / И.А. Козлова // Прикладные задачи Математики:материалы XXV международной научно-технической конференции, 18 – 22 сентября 2017 года. Севастополь / - Севастополь: Севастоп. гос. ун-т, 2017. - С. 183-186

Козлова И.А. Применение полиномов наилучшего равномерного приближения в оценке и анализе экономических явлений. *В настоящей работе представлено построение наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка, которую с экономической точки зрения можно рассматривать как модель финансового рынка - двойной зигзаг. Метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения данной функции, а также нахождение максимального отклонения полученной аппроксимации осуществляется с помощью разработанной "Программы, реализующей метод построения полиномов наилучшего равномерного приближения фрактальной функции Бланка". Программа разработана в среде MatLab и строит полиномы наилучшего равномерного приближения по заданному параметру функции Бланка и порядку аппроксимирующего многочлена, вычисляет максимальное отклонение полученного приближения и значение полинома в любой точке. В основе работы программы заложено нахождение чебышевского альтернанса.*

Ключевые слова: *фрактальная функция, наилучшее равномерное приближение, двойной зигзаг.*

Kozlova I. A. Application of polynomials of best uniform approximation in the evaluation and analysis of economic phenomena. *This paper presents the construction of a best uniform approximation of fractal functions of the Blanca, which from an economic point of view can be regarded as a model of a financial market a double zigzag. A method of constructing polynomials of best uniform approximation to this function and finding the maximum deviation of the obtained approximation is carried out using the developed "Program that implements a method of constructing polynomials of best uniform approximation of fractal functions of the Blanca." The program was developed in MatLab and builds a polynomial best uniform approximation of a given function parameter of the form and order of the approximating polynomial, computes the maximum deviation of the obtained approximation and the value of the polynomial at any point. In the basis of the work program is based on the finding of chebyshev alternans.*

Keywords: *fractal function, the best uniform approximation of a double zigzag.*

Статья поступила в редакцию 20.03.2018
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом