

УДК 004.04

Статистические компьютерные оценки характеристик многомерных операций и объектов. I.

А.И. Андрюхин

Донецкий национальный технический университет
alexandruckin@rambler.ru

Андрюхин А.И. Компьютерные оценки характеристик многомерных операций и объектов. I. В работе выполнена оценка вероятностные характеристики случайных матриц. Элементы матрицы имеют равномерное распределение. Возмущения элементов матриц предполагаются наблюдаемыми и ненаблюдаемыми. Они также имеют равномерное распределение. Эти результаты относятся к известной проблеме, которую рассматривал Эшби при анализе поведения человека и конструкции его мозга. Для описания дополнительных параметров измеряемого физического параметра используются комплексные числа и кватернионы. Результаты работы, могут быть использованы при решении определенных вопросов построения устойчивых систем управления, теории интервального анализа и теории идентификация систем.

Введение

Проблема измерений физических величин всегда затрагивала многие базовые концепты науки и в настоящее время приобрела признаки самодостаточного научного направления, которое предполагает большой вклад как научных и финансовых ресурсов (Большой коллайдер и др.). Можем выделить для целей работы философские, физические и математические аспекты этой проблемы.

Из античных источников известно, что пифагореец Гиппас из Метапонта (ок. 500 гг. до н. э.) поплатился жизнью за обнаружение доказательства существования иррациональных (несоизмеримых) чисел. Ведь основой мировоззрения пифагорейцев считалось положение, что существует малая и неделимая единица длины, которая целое число раз входит в отрезок любой длины и опровержение его Гиппасом влекло разрушение всего здания пифагореизма.

А.Пуанкаре обратил внимание на тот факт, что “пространство представлений в своих трех формах — визуального, тактильного и моторного пространства — существенно отличается от геометрического пространства”[1].

Далее он утверждает: “Наши представления суть только воспроизведение наших ощущений, поэтому они могут разместиться только в том же кадре, в каком и последние, т. е., в пространстве представлений” [1].

Отметим, что здесь имеется корреляция с известным буддийским вопросом 6 века “Что движется флаг или ветер ? Двигается ваше сознание.”

Следовательно, может случиться, что мы переходим от системы впечатлений А к системе В двумя различными способами:

1) произвольно и без каких-либо мускульных ощущений — когда перемещается предмет;

2) произвольно и при наличии мускульных ощущений — когда предмет неподвижен, но перемещаемся мы таким образом, что предмет имеет по отношению к нам относительное движение.

Если дело происходит указанным образом, то переход от системы впечатлений А к системе В есть только изменение положения.

Отсюда следует, что зрение и осязание не могли бы нам дать понятие пространства без помощи «мускульного чувства».

Использование дополнительных параметров рассматриваемого (измеряемого) физического параметра проиллюстрируем на примере оценки показателя преломления для металлической поверхности. В [2] сказано “ В соответствии с законом синусов Френеля амплитуда отраженного от прозрачного тела света (поляризованного таким образом) относится к амплитуде падающего света как $J = \frac{\sin(i+r)}{\sin(i-r)}$, где i - угол падения, а r определяется уравнением $\sin i = \mu \sin r$.

МакКулаг и Коши допустили, что эти уравнения остаются в силе и для отражения от металлической поверхности, при условии, что показатель преломления μ замещается **комплексной величиной**, скажем,

$$\mu = v(1 - \kappa\sqrt{-1}),$$

где v и κ следует рассматривать как две постоянные, характерные для металла.

Величины $|J|^2$ и δ интерпретируются точно так же, как и в теории полного отражения Френеля: то есть, мы принимаем, что первая означает отношение интенсивностей отраженного и падающего света, а δ измеряет изменение фазы, которое происходит при отражении света”.

Целью исследования является оценка структуры областей параметров при вычислениях и измерениях на основе базовых принципов интервального анализа.

Задачей исследования является

- 1) оценка структуры областей параметров при вычислениях и измерениях на основе базовых принципов интервального анализа и идентификация системных параметров;
- 2) определение вероятностей успешного измерения при некоторых ограничениях на области допустимых переменных измерений;
- 3) оценка структуры областей параметров при вычислениях и измерениях с учетом наблюдаемых и ненаблюдаемых возмущений.

Вероятностные оценки областей параметров измерений

При определении вероятности успешного измерения мы должны определить область допустимых параметров измерений, на основе которой используя понятие геометрической вероятности, статистически выяснить с определенной точностью ее площадь(объем).

Известно, что для определения числа независимых испытаний N , в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p и отклонение частоты P события A меньше, чем на ε от p , применяется формула:

$$N = (p(1-p)[\Phi^{-1}(Q/2)]^2 / \varepsilon^2$$

Здесь Q - уровень доверия, Φ - функция Лапласа. Для целей работы принимаем $\varepsilon=0.001$, $p>0.1$ и $Q=0.999$. Округляя, получаем $N \approx 10$ млн испытаний [4].

Действительные числа

Простейшим примером может быть оценка выражения $\frac{Y+Ey}{X+Ex} - (R + Er)$ с некоторой точностью ε [3,4]. Здесь Y -истинное значение показателя, Ey -погрешность при измерении Y , X -истинное значение показателя, Ex -погрешность при измерении X , R -точное значение для Y/X . Подчеркнем, что под Ey , Ex понимаем искажения, которые определяются также и присущими данным объектам ненаблюдаемыми характеристиками. На рис.1 представлена область

$Abs\left(\frac{Y+Ey}{X+Ex} - (R + Er)\right) < \varepsilon$ (1)
при значениях $Y=12$, $X=4, R=3$, $\varepsilon=0.0015$, $Ey=Ex=Er=0.05$.

Аналогичный вид имеет область решений при комплексных возмущениях

$$Abs\left(\frac{Y+i \cdot Ey}{X+i \cdot Ex} - (R + i \cdot Er)\right) < \varepsilon$$
 (2)

при значениях $Y=12$, $X=4, R=3$, $\varepsilon=0.0015$, $Ey=Ex=Er=0.05$. Она представлена на рис.2.

При определении вероятности попадания результатов измерений в эти области было получено при 10 000 000 испытаниях соответственно благоприятных исходов 299937 и 296402.

На практике при обработке результатов измерений применяются различного рода дисперсионные оценки. Использование их даст следующие результаты.

На рис.3 представлена область

$$Abs\left(\frac{\sqrt{Y^2+EY}}{\sqrt{X^2+EX}} - (\sqrt{R^2+ER})\right) < \varepsilon$$
 (3)

при значениях $Y=12$, $X=4, R=3$, $\varepsilon=0.0015$, $Ey=Ex=Er=0.05$.

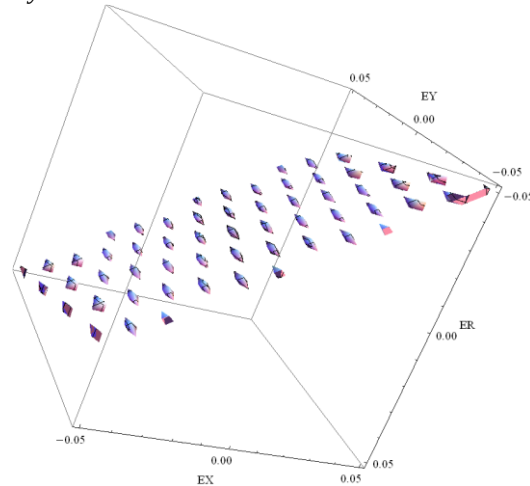


Рисунок 1 – Область решений неравенства (1).

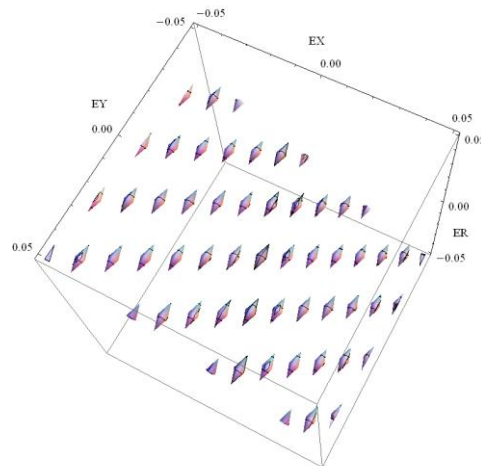


Рисунок 2 – Область решений неравенства (2).

При комплексных возмущениях область решений на рис.4 определяется выражением

$$Abs\left(\frac{\sqrt{Y^2+i \cdot EY}}{\sqrt{X^2+i \cdot EX}} - (\sqrt{R^2+i \cdot ER})\right) < \varepsilon$$
 (4)

при значениях $Y=12$, $X=4, R=3$, $\varepsilon=0.0015$,
 $E_y=E_x=Er=0.05$.

При определении вероятности попадания результатов измерений в эти области было получено при 10 000 000 испытаниях благоприятных исходов соответственно 300267 и 299860.

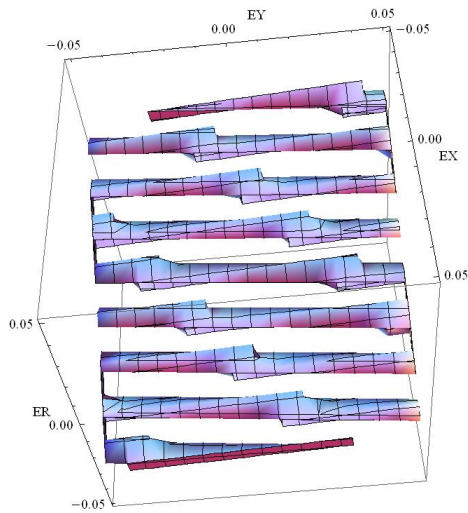


Рисунок 3 – Область решений неравенства (3).

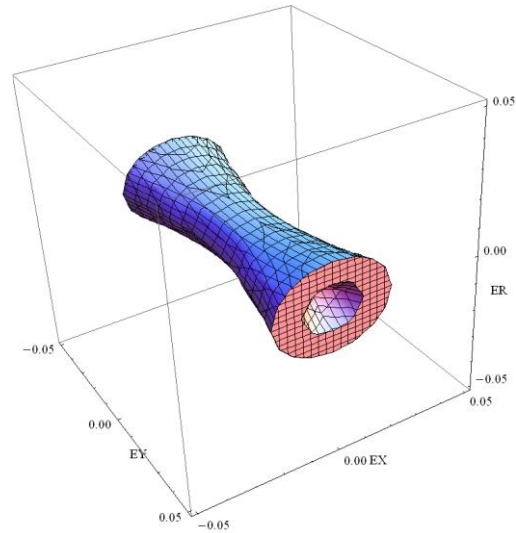


Рисунок 5а – Область решений для (5),
 $\varepsilon=0.000015$.

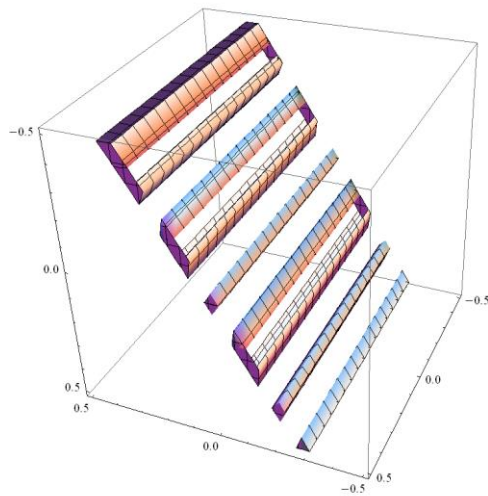


Рисунок 4 – Область решений неравенства (4).

При варьировании параметров Область решений также значительно меняет свой вид.

К примеру, на рис.5 представлена область решений при вариации ε , уменьшая значения в два раза.

$$Abs\left(\frac{Abs(Y+i \cdot E_y)}{Abs(X+i \cdot E_x)} - Abs(R + i \cdot E_r)\right) < \varepsilon \quad (5)$$

при значениях $Y=12$, $X=4, R=3$, $E_y=E_x=Er=1$.

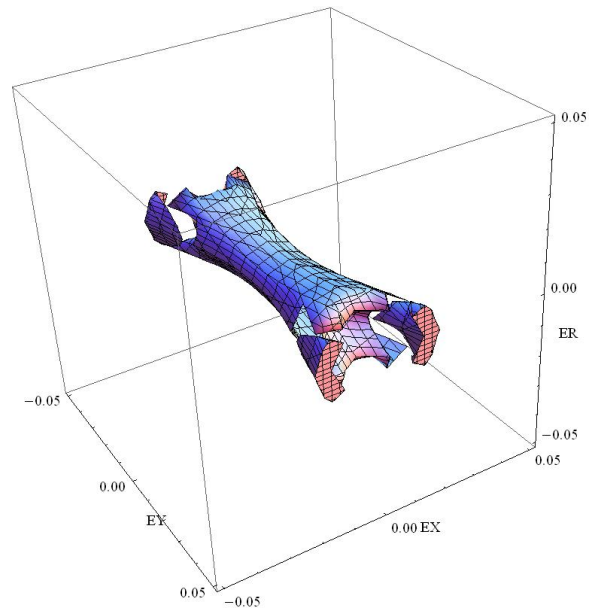


Рисунок 5б – Область решений для (5),
 $\varepsilon=0.0000075$.

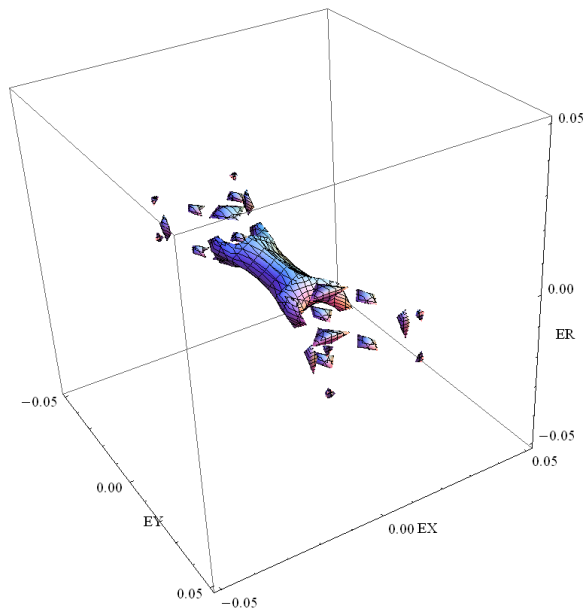


Рисунок 5в – Область решений для (5), $\varepsilon=0.000003525$.

Кватернионы

Для описания дополнительных параметров рассматриваемого (измеряемого) физического параметра можно помимо комплексных величин использовать другой известный математический формализм, как кватернионы [5-6]. Возможно их применение несколькими способами, но более подробно эти вопросы разбираются во второй части работы. В данной части статьи следуя вышеизложенному подходу для комплексных возмущений необходимо определить условия для коммутативности операции их умножения..

Рассмотрим представления кватернионов $x=x+x_1i+x_2j+x_3k$, $y=y+y_1i+y_2j+y_3k$, $z=z+z_1i+z_2j+z_3k$ матрицами 2×2 с комплексными элементами. Имеем

$$x = \begin{pmatrix} x + x_1i & x_2 + x_3i \\ -x_2 + x_3i & x - x_1i \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y + y_1i & y_2 + y_3i \\ -y_2 + y_3i & y - y_1i \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} z + z_1i & z_2 + z_3i \\ -z_2 + z_3i & z - z_1i \end{pmatrix}$$

Если $x=yz$, то

$$x = yz - y_1z_1 + y_2z_2 - y_3z_3,$$

$$x_1 = y_1z + yz_1 + y_3z_2 - y_2z_3,$$

$$x_2 = y_2z + z_2y + y_1z_3 - y_3z_1,$$

$$x_3 = y_3z + yz_3 + y_2z_1 - y_1z_2.$$

Рассмотрим выражение $[y,z]=yz-zy$

$$yz-zy = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Получаем выражения для элементов матрицы

$$f_{11} = x - yz + y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 - I(x_1 + y_1z + yz_1 + y_3z_2 - y_2z_3),$$

$$f_{12} = x_2 + Ix_3 - y_2z + y_3z_1 - yz_2 - y_1z_3 - I(y_3z + y_2z_1 - y_1z_2 + yz_3),$$

$$f_{21} = -x_2 + Ix_3 + y_2z - y_3z_1 + yz_2 + y_1z_3 - I(y_3z + y_2z_1 - y_1z_2 + yz_3),$$

$$f_{22} = x - Ix_1 - yz + y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 - I(-y_1z - yz_1 - y_3z_2 + y_2z_3)$$

Отсюда можем получить условия коммутативности кватернионов:

- 1) для действительной части $y_1z_3 - y_3z_1 = 0$
- 2) два условия для мнимой части $y_2z_2 - y_3z_3 = 0$ и $y_2z_1 - y_1z_2 = 0$.

Следствием этих соотношений имеем $z_3 = \pm z_2$.

Если попытаться визуализировать области с кватернионными возмущениями, то необходимо конкретизировать значение определенных переменных (в общем случае три кватерниона определяются 12 координатами, а мы имеем в силу трехмерности нашего зрительного анализатора только три координаты) и на рис.5 представлена область, удовлетворяющая условиям

$$\text{Abs}\left(\frac{x}{\sqrt{QY}} - (\sqrt{QZ})\right) < \varepsilon,$$

где $X=120$, $Y=30$, $Z=4$, $QY = Y^2 + (EY_3)^2 + (EY_3 \cdot EZ_1 / EZ_2)^2 + (EY_3 \cdot EZ_3 / EZ_1)^2$, $QZ = Z^2 + EZ_1^2 + EZ_2^2 + EZ_3^2$ ($EZ_2^2 = EZ_3^2$), $\varepsilon=0.0015$.

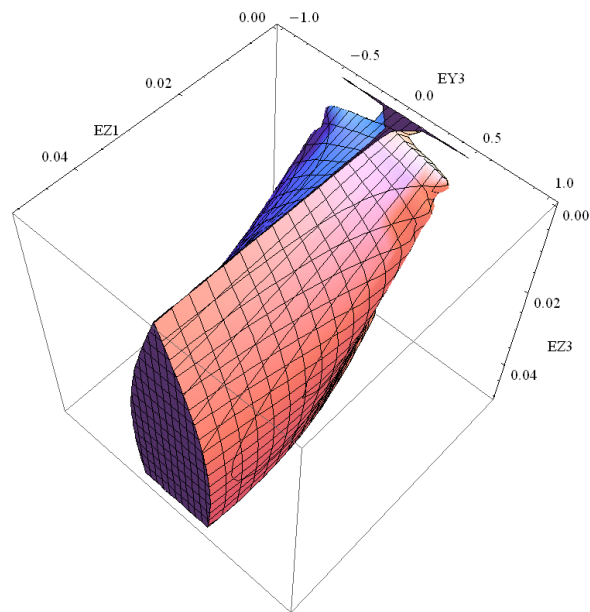


Рисунок 5 – Область решений

Компьютерные оценки устойчивости систем при возмущениях параметров

Широко применяемой моделью представления динамических систем является система дифференциальных уравнений $X' = A \cdot X$, где $X = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$ определяет состояние системы. Свойства спектра матрицы т.е. многомерный вектор собственных чисел определяет устойчивость системы.

Таким образом, несколько упрощая проблему определения устойчивости большой системы, мы можем сказать, что решение сводится к задаче определения собственных чисел матрицы коэффициентов $A=\{a_{ij}\}$. Если матрица A удовлетворяет известному требованию отрицательности реальных частей корней характеристического уравнения $\text{Det}(A-\lambda I)=0$, то система устойчива. Однако при неизвестных возмущениях матрица A является случайной и следовательно результаты определения собственных значений случайной матрицы также случайны.

Естественно выполнялись попытки построить функцию распределения собственных значений матрицы с действительными случайными коэффициентами, но они оказались неудачными[8].

На основе моделирования были получены оценки вероятностей $\text{Prob}(\text{Re}(\lambda_i)<0)$, т.е. того что реальные части собственных чисел матрицы A отрицательны.

Известны попытки решения этой проблемы с помощью построения нелинейного параметра $K=\sigma(NC)^{1/2}$, где $0<C<1$ -доля ненулевых элементов матрицы A , N - размерность A , σ -параметр гауссовой функции плотности распределения вероятностей для A [9]. Использование ее позволяет нам выполнять определение a_{ij} . Если мы имеем функцию Гаусса с нулевым средним, то дисперсия $\sigma^2=\sum \sum (a_{ij})^2$.

На основе статистического моделирования была получена оценка, что если $K<1$, то для всех $i=(1,N)$ $\text{Prob}(\text{Re}(\lambda_i)<0)\approx 1$ [9].

Далее мы построим статистические оценки устойчивости систем, считая, что случайные элементы a_{ij} имеют равномерное распределение на интервале $(-\text{Min}, \text{Max})$ с возмущениями, которые имеют также равномерное распределение на интервале $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$, где параметр ε варьируется. Алгоритм расчета имеет вид

1. Задаем число испытаний I , размер матрицы N , ε , Min , Max .
2. Генерируем эталонную случайную матрицу A (ее элементы a_{ij} имеют равномерное распределение на интервале $(-\text{Min}, \text{Max})$) и определяем вектор λ_A ее собственных чисел.
3. Генерируем матрицы $M_i=\{m_{ij}\}$ ($i=1,I$), где элементы m_{ij} имеют равномерное распределение на интервале $(-\text{Min}, \text{Max})$ с накладываемыми возмущениями, которые имеют равномерное распределение на интервале $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$.
4. Для каждой матрицы $M_i=\{m_{ij}\}$ ($i=1,I$) вычисляются вектор λ_{Mi} ее собственных чисел и σ_i -среднеквадратичное отклонение λ_{Mi} от вектора λ_A . Если матрица M_i имеет λ_{Mi} с отрицательными реальными частями, мы считаем ее устойчивой.

Результаты расчетов оформлены следующим образом. Каждой клетке таблицы с $\varepsilon=0.1$ сопоставлен рисунок из двух частей.

Диапазон изменения σ_i ($i=1,I$) разбит на интервалы и горизонтальные координаты этих частей рисунка определяют номер интервала $n=1,40$.

Нижний (верхний) график определяет число всех (устойчивых) матриц попавших в соответствующий интервал (R -число устойчивых систем).

Типичными являются результаты на рис.6-11 ($I=10^5$) и на рис.11 ($I=10^6$).

Их общие характеристики представлены в таб.1-3.

Таблица 1. Число испытаний $I=100000$.

N	$\varepsilon=0.1$	$\varepsilon=0.05$	$\varepsilon=0.01$
3	10462	10321	10495
4	3766	3816	3755
5	1142	1140	1120
6	247	268	286
7	67	65	68
8	12	13	11
9	1	1	3

Таблица 2. Число испытаний $I=1000000$.

N	$\varepsilon=0.1$	$\varepsilon=0.05$	$\varepsilon=0.01$
3	105105	104884	105354
4	37914	37759	37755
5	11565	11713	11607
6	2947	3104	3010
7	699	678	678
8	104	107	114
9	24	16	22

Заметим, что данные в этих таблицах пропорциональны I и незначительно зависят от ε и значительно от N .

Аппроксимация данных таблиц зависимостью $A \cdot I \cdot e^{K \cdot N}$ с применением метода наименьших квадратов дала следующие результаты, которые представлены в таблице 3.

Проверка прогностических свойств найденных параметров показала их достаточную точность. Но при увеличении N происходит ухудшение этих свойств.

Таблица 3. Значения параметра A и K .

	I	$\varepsilon=0.1$	$\varepsilon=0.05$	$\varepsilon=0.01$
A	10^5	2.5735	2.51768	2.52639
	10^6	2.54531	2.35898	2.56829
K	10^5	-1.06205	-1.04195	-1.06589
	10^6	-1.06429	-1.05859	-1.05897

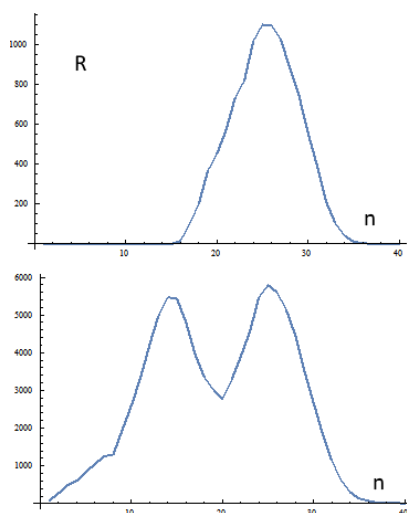


Рисунок 6 – Графики распределения N=3

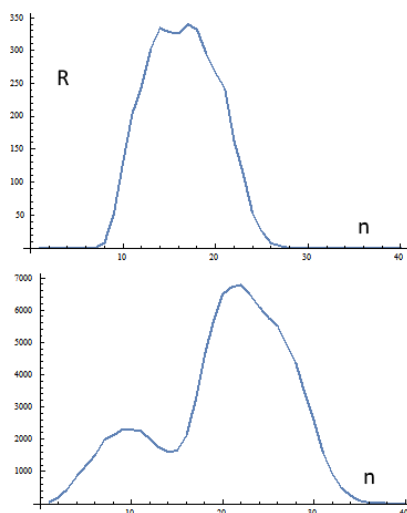


Рисунок 7 – Графики распределения N=4

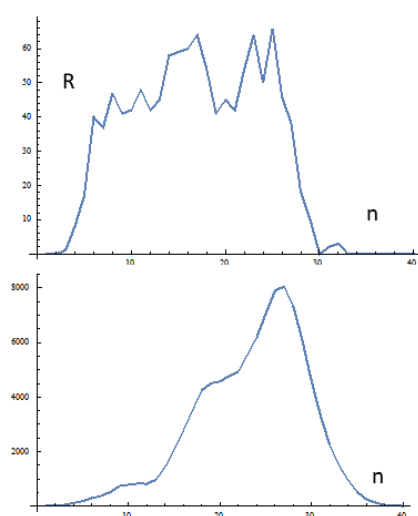


Рисунок 8 – Графики распределения N=5

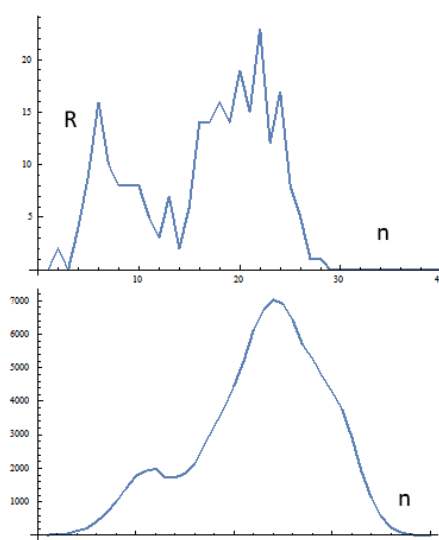


Рисунок 9 – Графики распределения N=6

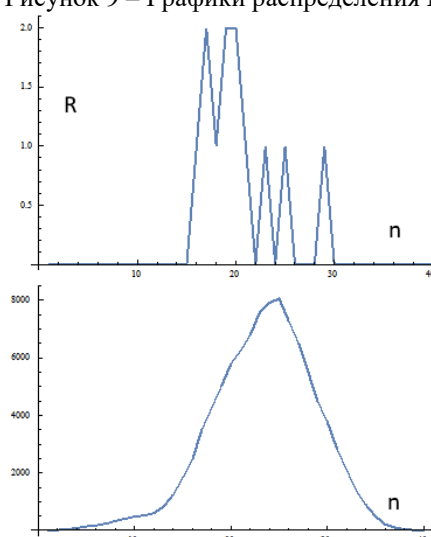


Рисунок 10 – Графики распределения N=7

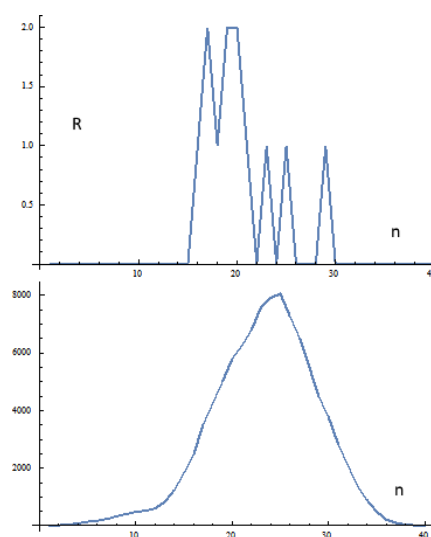


Рисунок 11 – Графики распределения N=8

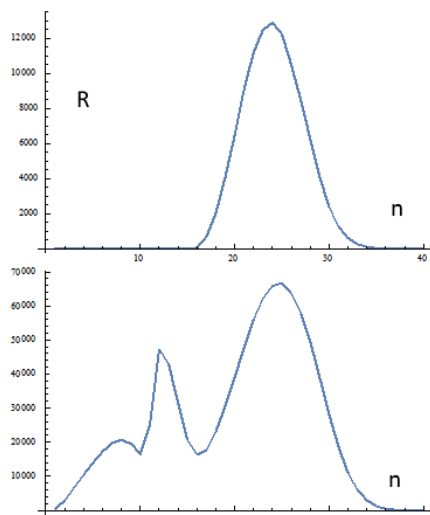


Рисунок 12 – Графики распределения N=3

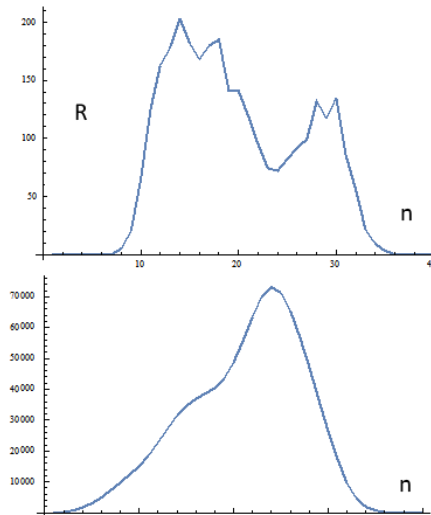


Рисунок 15 – Графики распределения N=6

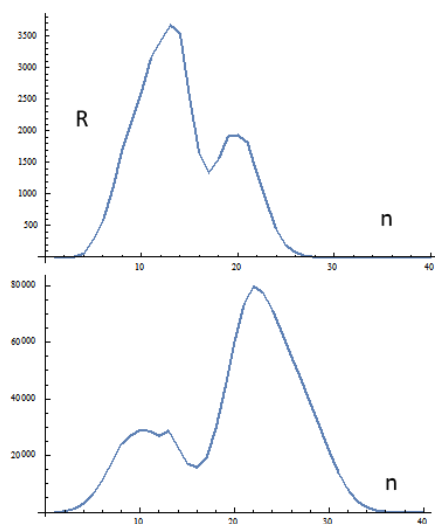


Рисунок 13 – Графики распределения N=4

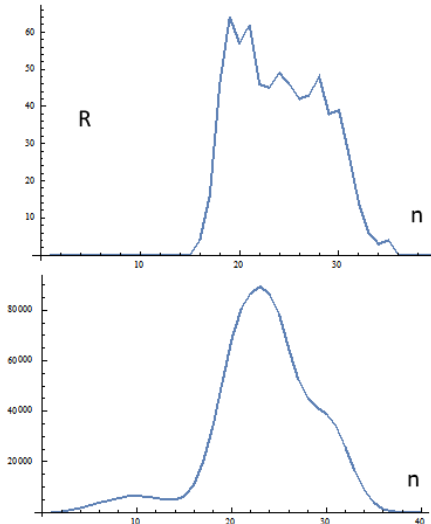


Рисунок 16 – Графики распределения N=7

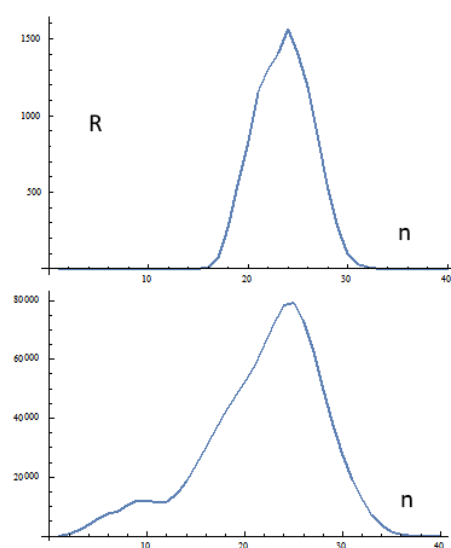


Рисунок 14 – Графики распределения N=5

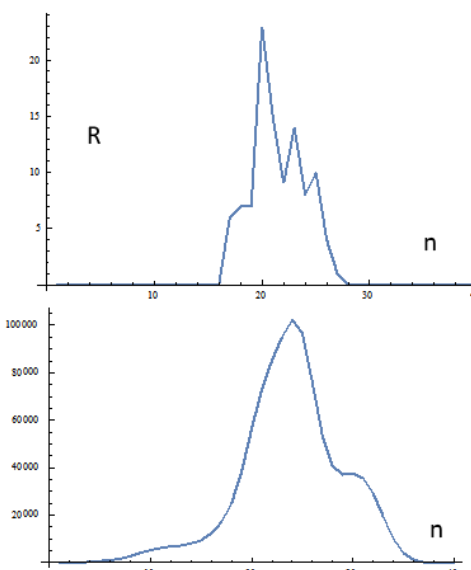


Рисунок 17 – Графики распределения N=8

Представляет практический интерес оценка устойчивости(неустойчивости) конкретной матрицы. Здесь мы можем рассматривать два варианта. В первом случае возмущения имеют только действительный (как мы считаем наблюдаемый) тип, во втором при расчетах используем комплексные числа.

Обозначим соответствующие алгоритмы расчета через II,III и приведем типичные таблицы результатов 3 и 4.

II Алгоритм расчета для действительных возмущений имеет вид

1. Задаем число испытаний I , размер матрицы N , ε , Min , Max .
2. Генерируем эталонную случайную матрицу A (ее элементы $a_{i,j}$ имеют равномерное распределение на интервале $(-\text{Min}, \text{Max})$) и определяем вектор λ_A ее собственных чисел.
3. Генерируем матрицы $M_i = \{ m_{i,j} \}$ ($i=1, I$), где элементы $m_{i,j}$ равны $a_{i,j}$ с накладываемыми возмущениями, которые имеют равномерное распределение на интервале $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$.
4. Для каждой матрицы $M_i = \{ m_{i,j} \}$ ($i=1, I$) вычисляются вектор λ_{M_i} ее собственных чисел и σ_i - среднеквадратичное отклонение λ_{M_i} от вектора λ_A . Если матрица M_i имеет λ_{M_i} с отрицательными реальными частями, мы считаем ее устойчивой.

Результаты расчетов представлены в таблице 3.

Таблица 3. Число испытаний $I=100000$.

N	$\varepsilon=0.01$	$\varepsilon=0.05$	$\varepsilon=0.1$
3	0	100000	0
4	0	100000	0
5	1120	1186	1142
6	303	314	305
7	68	65	67
8	11	13	12
9	3	1	1

III Алгоритм расчета для комплексных возмущений имеет вид

1. Задаем число испытаний I , размер матрицы N , ε , Min , Max , P .
2. Генерируем эталонную случайную матрицу A (ее элементы $a_{i,j}$ имеют равномерное распределение на интервале $(-\text{Min}, \text{Max})$) и определяем вектор λ_A ее собственных чисел.
3. Генерируем матрицы $M_i = \{ m_{i,j} \}$ ($i=1, I$), где элементы $m_{i,j}$ равны $a_{i,j}$ с накладываемыми комплексными возмущениями, которые имеют равномерное распределение для действительной и мнимой части на интервале $(-P \cdot \varepsilon/2, P \cdot \varepsilon/2)$.

4. Для каждой матрицы $M_i = \{ m_{i,j} \}$ ($i=1, I$) вычисляются вектор λ_{M_i} ее собственных чисел и σ_i - среднеквадратичное отклонение λ_{M_i} от вектора λ_A . Если матрица M_i имеет λ_{M_i} с отрицательными реальными частями, мы считаем ее устойчивой.

Результаты расчетов представлены в таблице 4

Таблица 3. Число испытаний $I=1000000$, $\varepsilon=0.1$.

P	N=4	N=5	N=6	N=7
10	5747	16	0	0
20	1094	22	5	3
25	951	1448	1584	13
30	6756	1445	21	0
40	7863	934	32	2
50	4407	414	12	3
60	3466	383	213	0

Выводы

Научная новизна работы заключается в том, что получены вероятностные характеристики случайных матриц с равномерным распределением для элементов матрицы и их возмущений, которые предполагаются и наблюдаемыми и ненаблюдаемыми.

Тем самым внесен определенный вклад в известные проблемы, которые рассматривал Эшби при анализе поведения человека и конструкции его мозга.

Практическая значимость результатов состоит в получении интервальных оценок параметров для некоторых операций выполняемых с многомерными величинами.

Ясно, что использование таких формализмов, как комплексные числа, кватернионы и т.п., как ненаблюдаемых возмущений при анализе результатов измерений является в некоторой мере искусственным приемом. Но логика истории научного поиска показывает необходимость такого подхода.

Поэтому дальнейшая перспектива связана с поиском других подходов к описанию ненаблюдаемых возмущений. Другое направление дальнейших исследований связано с использованием других видов функций распределения.

Результаты работы, помимо теории интервального анализа и теории идентификация систем могут быть использованы при решении определенных вопросов построения устойчивых систем управления и решения обратных задач [10].

Литература

1. Пуанкаре А. О науке: Пер. с фр./Под ред. Л. С. Понтрягина.— 2-е изд., стер.— М.: Наука. Гл. ред, физ.-мат. лит., 1990.—736
2. Уиттеккер Э. История эфира и электричества.-Ижевск:НИИЦ Регулярная и стохастическая динамика, 2001, 512 с.
3. С.П. Шарый. Конечномерный интервальный анализ, 2013. — 613 с. — <http://www.nsc.ru/interval>
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1972, с.101.
5. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики

- твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения.-М.:Физматлит, 2006.-512 с.
6. A.J.Hanson. Visualizing quaternions. Morgan Kaufmann is an imprint of Elsevier 2006 Elsevier Inc.
7. Todd A. E., N. Le Bihan, S. J. Sangwine. Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc, 2014.
8. Эшби У.Р. Конструкция мозга. М.: ИИЛ, 1962.
9. Николис Дж. Динамика иерархических систем: Эволюционное представление. Москва, Мир, 1989г. 488 с.
10. Теребиж В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач.-М.: Физматлит, 2005.-376 с.

Andruckin A.I. *Computer performance evaluation of multidimensional operations and objects.* This paper investigates the structure of the parameter area in the calculations and measurements based on the basic concepts of interval analysis. The objective of the study is to identify the system parameters, evaluation of the structure of the parameter area in the calculations and measurements based on the basic principles of interval analysis, determining the likelihood of successful measurement under certain restrictions on the tolerance to variable measurements, evaluation of the structure of the parameter area, taking into account the observable and unobservable disturbances.

The paper estimated the probability characteristics of random matrices. Elements of the matrix have a uniform distribution as well. Perturbation matrix elements are assumed to be observed and unobservable. They also have a uniform distribution. These results are well-known problem that Ashby considered in the analysis of human behavior and the structure of the brain. For a description of additional parameters measured physical parameter uses complex numbers and quaternions.

The results can be used to solve certain problems of constructing sustainable management systems, in addition to the theory of interval analysis and the theory of identification systems.

Keywords: multidimensional operations, complex numbers, quaternions, interval analysis.

Андрюхин А.И. Компьютерные оценки характеристик многомерных операций и объектов. I. В работе выполнена оценка вероятностные характеристики случайных матриц. Элементы матрицы имеют равномерное распределение. Возмущения элементов матриц предполагаются наблюдаемыми и ненаблюдаемыми. Они также имеют равномерное распределение. Эти результаты относятся к известной проблеме, которую рассматривал Эшби при анализе поведения человека и конструкции его мозга. Для описания дополнительных параметров измеряемого физического параметра используются комплексные числа и кватернионы. Результаты работы, могут быть использованы при решении определенных вопросов построения устойчивых систем управления, теории интервального анализа и теории идентификация систем.

Ключевые слова: многомерные операции, комплексные числа, кватернионы, интервальный анализ.

Статья поступила в редакцию 21.09.2015

Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом