

УДК 51-74

Применение теста Фукса - Ковалевской - Пенлеве для решения модельной задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде (на примере пневмообработки угольного пласта).

Ю.Н. Добровольский
Донецкий национальный технический университет
dyn_don_20.14@mail.ru

Добровольский Ю.Н. Применение теста Фукса - Ковалевской- Пенлеве для решения модельной задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде (на примере пневмообработки угольного пласта). В данной статье предлагается тест Фукса - Ковалевской - Пенлеве для решения модельной задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде. Необходимость применения этого теста объясняется тем, что многочисленными исследованиями установлено, что многие известные интегрируемые нелинейные уравнения математической физики обладают свойством Фукса - Ковалевской – Пенлеве. Были найдены также новые уравнения с таким свойством. При проверке более сложных уравнений и систем уравнений на тест Фукса - Ковалевской – Пенлеве могут появляться резонансы с высокими номерами. При этом трудности аналитического решения быстро нарастают. Однако в виду высокой алгоритмичности тест допускает успешное использование методов символьных вычислений. Например, с помощью системы Maple V удалось провести полную классификацию интегрируемых случаев уравнений мелкой воды с диссипацией и дисперсией низших порядков. Идея метода состоит в следующем. По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями решения уравнений с частными производными можно искать в виде разложений, содержащих особенность типа подвижного полюса. Положение полюса задается с помощью произвольной функции. Первоначально решение ищется в окрестности сингулярного многообразия $x-x_0(t)=0$ в виде обоснованного в статье разложения, где показатель α – целое положительное число, что обеспечивает полюсный характер подвижной особенности решения. Функция $x_0(t)$ считается произвольной. Полученное решение будет общим, если в это разложение войдут произвольные функции, причем число этих функций равно порядку рассматриваемого уравнения. Далее решение уравнения в частных производных ищут в окрестности сингулярного многообразия $\varepsilon(x,t)=0$ в установленном в статье виде – обобщенного разложения симметричного по независимым переменным. Показано, как хорошо работает тест Фукса – Ковалевской – Пенлеве для уравнения Бюргерса. Установлено, что имеется один резонанс $n=2$, для которого удовлетворяется соотношение совместности, поэтому его решение имеет требуемый произвол в две функции. При тестировании первого уравнения рассмотренной системы методом Фукса - Ковалевской – Пенлеве, было установлено следующее:

Первое. Поскольку оба слагаемые правой части уравнения имеют квадратичную нелинейность, то отсутствует особенность типа подвижного полюса, а присутствует алгебраическая точка ветвления. Поэтому решение искалось в виде степенного ряда общего вида. При этом получены некоторые решения полностью совпадающие с решениями, найденными в автором ранее.

Второе. Поскольку с функциональной точки зрения все уравнения системы имеют одинаковую природу, то этим свойством обладают и остальные уравнения системы.

Третье. При взятии достаточно большого числа слагаемых в одном или другом разложении, трудности аналитического решения быстро нарастают, поэтому был выполнен согласованный обрыв членов ряда начиная с некоторого k . В противном случае, можно использовать систему символьных вычислений, например, пакет Maple V или Maple VII.

Четвертое. Полезность полученных результатов заключается в том, что подбирая исходное решение таким образом, по ним можно априори выйти на нужный исследователю результат.

Пятое. В следующей статье будет показано, как применить полученные разложения к данной системе или найти преобразование (если оно существует), линеаризующее данную систему.

Введение

Подвижные особенности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Взаимосвязь вида обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями их решений была установлена более ста лет назад.

Особенности решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений точно соответствуют особенностям коэффициентов уравнений. Поскольку их положение не меняется с изменением постоянных интегрирования, то такие особенности именуют неподвижными. В случае нелинейных уравнений появляются также

подвижные особенности решений, положение которых зависит от начальных условий (от постоянных интегрирования).

Приведем простейшие примеры обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их решений с подвижными особенностями.

Уравнение	Решение	Тип особенности решения
$u'_z = -u^2$	$u = 1/(z - z_0)$	подвижный полюс
$u'_z = 2/u$	$u = 2\sqrt{z - z_0}$	алгебраическая точка ветвления
$u'_z = e^{-u}$	$u = \ln(z - z_0)$	логарифмическая точка ветвления
$u'_z = -u \ln^2 u$	$u = \exp[1/(z - z_0)]$	существенно особая точка

Определение. Алгебраические точки ветвления, логарифмические точки ветвления и существенно особые точки решений называются критическими особыми точками.

В 1884 году Л. Фуке (L. Fuchs) показал, что нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

$$u'_z = R(z, u)$$

с рациональной по второму и аналитической по первому аргументу функцией R обладают решениями без подвижных критических точек (т.е. только с подвижными полюсами) лишь в случае общего уравнения Риккати

$$u'_z = A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2.$$

Классификация на (комплексной плоскости) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$u''_{zz} = R(z, u, u'_z),$$

где $R=R(z, u, w)$ – функция рациональная по u и w и аналитическая по z , была проведена П. Пенлеве (P. Painleve, 1900) и Б. Гамбье (B. Gambier, 1910). Они показали, что все уравнения данного вида, решения которых не имеют подвижных критических точек (допустимыми считаются неподвижные особые точки и подвижные полюса) сводятся к 50 классам уравнений. Из них 44 класса интегрируются в квадратурах или допускают понижение порядка. Остальные 6 классов являются неприводимыми, их называют уравнениями Пенлеве (а их решения – трансцендентными функциями Пенлеве или трансцендентами Пенлеве).

Первое уравнение Пенлеве (в канонической форме) имеет вид

$$u''_{zz} = 6u^2 + z.$$

В окрестности подвижного полюса z_0 его решения представимы в виде ряда

$$u = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$a_2 = -\frac{1}{10}z_0, a_3 = -\frac{1}{6}, a_4 = C, a_5 = 0, a_6 = \frac{1}{300}z_0^2,$$

где z_0 и C – произвольные постоянные, коэффициенты a_n ($n \geq 7$) однозначно определяются через z_0 и C .

Второе уравнение Пенлеве (в канонической форме) имеет вид

$$u''_{zz} = 2u^3 + zu + a.$$

В окрестности подвижного полюса z_0 его решения допускают следующие разложения:

$$u = \frac{m}{z - z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

$$b_1 = -\frac{1}{6}mz_0, \quad b_2 = -\frac{1}{4}(m + a), \quad b_3 = C,$$

$$b_4 = \frac{1}{72}z_0(m + 3a),$$

$$b_5 = \frac{1}{3024}[(27 + 81a^2 - 2z_0^3)m + 108a - 216Cz_0],$$

где $m = \pm 1$; z_0 и C – произвольные постоянные; коэффициенты b_n ($n \geq 6$) однозначно определяются через z_0 и C .

Надо отметить, что решение четвертого уравнения Пенлеве имеет подвижный полюс, а решения третьего, пятого и шестого уравнений Пенлеве имеют неподвижные логарифмические точки ветвления.

Замечание. В 1888 году С.В. Ковалевской удалось проинтегрировать уравнения движения недеформируемого твердого тела с закрепленной точкой под действием силы тяжести в неизвестном до нее случае. Был выполнен анализ решений системы шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. При этом решение искалось в виде разложений всех неизвестных величин в ряды с полюсными подвижными особенностями

$$u = (z - z_0)^{-n} [a_0 + a_1(z - z_0) + \dots].$$

Общность решения обеспечивалась нужным (соответствующим порядку системы) числом произвольных коэффициентов и свободным параметром z_0 .

Надо отметить, что исследования С. В. Ковалевской предшествовали работам П. Пенлеве по классификации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, который использовал разложения аналогичного вида.

Решения уравнений с частными производными, имеющие подвижный полюс. Описание метода

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями решения

уравнений с частными производными можно искать в виде разложений, содержащих особенность типа подвижного полюса. Положение полюса задается с помощью произвольной функции.

Для простоты изложения далее будем рассматривать уравнения математической физики с двумя независимыми переменными x, t и зависимой переменной w , которые не зависят явно от x и t .

1⁰. Простейшая схема. Решение ищется в окрестности сингулярного многообразия $x-x_0(t)=0$ в виде разложения

$$w(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \varepsilon^n, \quad \varepsilon = x - x_0(t). \quad (1)$$

Здесь показатель α – целое положительное число, что обеспечивает полюсный характер подвижной особенности решения. Функция $x_0(t)$ считается произвольной.

Выражение (1) подставляется в рассматриваемое уравнение. Сначала из баланса ведущих сингулярных членов определяются показатель α и главный член разложения $w_0(t)$. Затем собираются члены при одинаковых степенях ε . Приравнявая полученные выражения (при одинаковых степенях ε) нулю, приходят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_n(t)$.

Полученное решение будет общим, если в разложение (1) войдут произвольные функции, причем число этих функций равно порядку рассматриваемого уравнения.

2⁰. Общая схема. Тест Фукса – Ковалевской – Пенлеве. Решение уравнения в частных производных ищут в окрестности сингулярного многообразия $\varepsilon(x, t)=0$ в виде обобщенного разложения симметричного по независимым переменным:

$$w(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \varepsilon^n, \quad \varepsilon = \varepsilon(x, t). \quad (2)$$

где $\varepsilon, \varepsilon_x \neq 0$. Здесь и далее нижние индексы x и t обозначают соответствующие частные производные.

Разложение (1) является частным случаем разложения (2), когда уравнение сингулярного многообразия разрешено относительно переменной x .

Требование отсутствия подвижных критических точек подразумевает, что α – положительное целое число. Решение будет общим, если степень функционального произвола в коэффициентных функциях $w_n(x, t)$ и функции разложения $\varepsilon(x, t)$ будет совпадать с порядком уравнения (в полном соответствии с теоремой Коши – Ковалевской).

Подставляя выражение (2) в уравнение и выделяя (а затем приравнявая нулю) члены при одинаковых степенях ε , получим рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения

$$P_N(n)w_n = f_n(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, \varepsilon_t, \varepsilon_x, \dots).$$

Здесь $P_N(n)$ – полиномы степени N с целочисленным аргументом n вида

$$P_N(n) = (n+1)(n-j_1)(n-j_2)\dots(n-j_{N-1}),$$

где N – порядок рассматриваемого уравнения.

Если корни полинома $j_1, j_2, \dots, j_{N-1}$, именуемые резонансами, оказываются целыми неотрицательными числами, и выполнены условия совместности

$$f_{n=j_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, N-1),$$

то говорят о выполнении теста Фукса – Ковалевской – Пенлеве для рассматриваемого уравнения. Уравнения, обладающие указанным свойством, часто относят к классу интегрируемых (что подтверждается приводимостью таких уравнений к линейным уравнениям во многих известных случаях).

Для первоначальной проверки выполнения теста Фукса – Ковалевской – Пенлеве для конкретного уравнения удобно пользоваться упрощенной схемой, основанной на разложении (1). Важные технические упрощения по сравнению с разложением (2) обусловлены выполнением равенств $(w_n)_x=0, \varepsilon_x=1$.

Разложение общего вида (2), подразумевающее более громоздкие, но вместе с этим более информативные выкладки, полезно использовать на втором этапе исследования после установления свойства Фукса – Ковалевской – Пенлеве. Это позволяет выяснить многие важные свойства уравнений и их решений и найти вид преобразования Беклунда, **линеаризующего** исходное уравнение.

Покажем, как применить тест Фукса – Ковалевской – Пенлеве для уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Для его анализа сначала будет использоваться простейшая, а затем общая схема применения теста Фукса – Ковалевской – Пенлеве, которые основаны на разложении (1) и (2).

Решение ищем в виде:

$$w(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \varepsilon^n, \quad \varepsilon = x - x_0(t).$$

Подставим в уравнение главный член разложения (1), что соответствует $n=0$.

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1}{\varepsilon^\alpha} w_0(t) \Rightarrow w'_t = \frac{-\alpha \cdot \varepsilon'_t \cdot w_0}{\varepsilon^{\alpha+1}} + \frac{w'_0}{\varepsilon^\alpha} = \\ &= \frac{\alpha \cdot x'_0 \cdot w_0}{\varepsilon^{\alpha+1}} + \frac{w'_0}{\varepsilon^\alpha}. \\ w'_x &= \frac{-\alpha w_0 \varepsilon'_x}{\varepsilon^{\alpha+1}} = \frac{-\alpha w_0}{\varepsilon^{\alpha+1}}, \quad w''_{xx} = \frac{(-\alpha) \cdot (-\alpha+1) \cdot w_0}{\varepsilon^{\alpha+2}} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot w_0}{\varepsilon^{\alpha+2}}. \end{aligned}$$

После подстановки найденных производных в уравнение (3), получим:

$$\frac{w'_0}{(x-x_0)^\alpha} + \frac{\alpha w_0 x'_0}{(x-x_0)^{\alpha+1}} - \frac{\alpha w_0^2}{(x-x_0)^{2\alpha+1}} = \frac{\nu \alpha (\alpha+1) w_0}{(x-x_0)^{\alpha+2}},$$

где $x_0 = x_0(t)$, $w_0 = w_0(t)$, штрих обозначает производную по t . Из баланса ведущих сингулярных членов (соответствуют «отбрасыванию» слева двух первых слагаемых), находим

$$2\alpha + 1 = \alpha + 2, \alpha = 1, w_0 = -2\nu, (n=0).$$

Таким образом, решение (3) ищем в виде:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) \varepsilon^{n-1},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} (w'_n \varepsilon^{n-1} + w_n (n-1) \varepsilon^{n-2} (-x'_0))$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (n-1) \varepsilon^{n-2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (n-1)(n-2) \varepsilon^{n-3}.$$

Подставим в (3):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (w'_n \varepsilon^{n-1} - (n-1) x'_0 \cdot w_n \cdot \varepsilon^{n-2}) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cdot \varepsilon^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \cdot w_n \varepsilon^{n-2} - \\ & - \nu \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2) \cdot w_n \cdot \varepsilon^{n-3} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Применяя операцию умножения степенных рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0) x^n \quad (5)$$

В нашем случае $a_n = w_n$, $b_n = (n-1)w_n$.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cdot \varepsilon^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \cdot w_n \varepsilon^{n-2} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} [w_0(-w_0) + w_1(n-2)w_{n-1} + w_2(n-3)w_{n-2} + \\ & + w_3(n-4)w_{n-3} + \dots + w_n(-w_0)] \varepsilon^{n-3} = -w_0^2 \varepsilon^{-3} + \\ & + [w_0 \cdot 0 \cdot w_1 + w_1(-w_0)] \varepsilon^{-2} + [w_0 \cdot w_2 + \\ & + w_1 \cdot 0 \cdot w_1 + w_2(-w_0)] \varepsilon^{-1} + [w_0 \cdot 2w_3 + \\ & + w_1 \cdot w_2 + w_2 \cdot 0 \cdot w_1 + w_3(-w_0)] \varepsilon^0 + \\ & + [w_0 \cdot 3w_4 + w_1 \cdot 2w_3 + w_2 \cdot w_2 + w_3 \cdot 0 \cdot w_1 + \\ & + w_4(-w_0)] \varepsilon^1 + \\ & + [w_0 \cdot 4w_5 + w_1 \cdot 3w_4 + w_2 \cdot 2w_3 + w_3 \cdot w_2 + w_4 \cdot 0 \cdot w_1 + \\ & + w_5(-w_0)] \varepsilon^2 + \dots + = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} [w_0(n-1)w_n + w_1(n-2)w_{n-1} + w_2(n-3)w_{n-2} + \\ & + w_3(n-4)w_{n-3} + \dots + w_n(-w_0)] \varepsilon^{n-3} \end{aligned}$$

В последней сумме группируем первое и последнее слагаемое,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [w_0(n-1)w_n - w_0 w_n + w_1(n-2)w_{n-1} + \\ & + w_2(n-3)w_{n-2} + \dots + w_{n-2}w_2 + w_{n-1} \cdot 0 \cdot w_1] \varepsilon^{n-3} \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (w'_n \varepsilon^{n-1} - (n-1) x'_0 \cdot w_n \cdot \varepsilon^{n-2}) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} [w_0(n-1)w_n - w_0 w_n + w_1(n-2)w_{n-1} + \\ & + w_2(n-3)w_{n-2} + \dots + w_{n-2}w_2 + w_{n-1} \cdot 0 \cdot w_1] \varepsilon^{n-3} - \\ & - \nu \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2) \cdot w_n \cdot \varepsilon^{n-3} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Вторую и третью сумму в (7) объединим под общий знак суммы, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (w'_n \varepsilon^{n-1} - (n-1) x'_0 \cdot w_n \cdot \varepsilon^{n-2}) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} [-(n+1)(n-2) \nu w_n + (n-2) w_1 w_{n-1} + \\ & + (n-3) w_2 w_{n-2} + \dots + w_{n-2} w_2 + w_{n-1} \cdot 0 \cdot w_1] \varepsilon^{n-3} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим через

$$E_n(t) = -(n+1)(n-2) \nu w_n + (n-2) w_1 w_{n-1} + (n-3) w_2 w_{n-2} + \dots + w_{n-2} w_2 + w_{n-1} \cdot 0 \cdot w_1 + \dots \quad (9)$$

Последнее троеточие в (9) означает, что не учтены слагаемые в первой сумме формулы (8).

Таким образом, уравнение Бюргерса после подстановки разложения (1) и выделения членов при одинаковых степенях $\varepsilon = x - x_0(t)$ принимает вид

$$w_t + w w_x - \nu w_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(t) \varepsilon^{n-3} = 0,$$

$$\text{где } E_n(t) = -(n+1)(n-2) \nu w_n + \dots$$

Видно, что имеется один резонанс $n=2$, для которого удовлетворяется соотношение совместности (обращается в нуль сумма членов с низшими коэффициентами в рекуррентном соотношении), и функция $w_2(t)$ остается произвольной. Это ясно из вида младших рекуррентных соотношений (соотношение при $n=2$ является следствием предыдущих и не содержит w_2).

Для того, чтобы было более понятно, запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$n=0 \Rightarrow \varepsilon^{-3} : -w_0^2 - 2\nu w_0 = 0$$

$$n=1 \Rightarrow \varepsilon^{-2} : x'_0 w_0 + w_0 \cdot 0 \cdot w_1 - w_1 w_0 - \nu \cdot 0 \cdot (-1) \cdot w_1 = x'_0 w_0 - w_1 w_0 = 0$$

$$n=2 \Rightarrow \varepsilon^{-1} : w'_0 + w_0 \cdot 1 \cdot w_2 + w_1 \cdot 0 \cdot w_1 + w_2 \cdot (-1) \cdot w_0 - \nu \cdot 1 \cdot 0 \cdot w_2 = w'_0 = 0$$

$$n=3 \Rightarrow \varepsilon^0 : w'_1 - x'_0 w_2 + w_0 \cdot 2 \cdot w_3 + w_1 \cdot 1 \cdot w_2 + w_2 \cdot 0 \cdot w_1 + w_3 \cdot (-1) \cdot w_0 - \nu \cdot 2 \cdot 1 \cdot w_3 = 0$$

$$n=4 \Rightarrow \varepsilon^1 : w'_2 - 2x'_0 w_3 + w_0 \cdot 3 \cdot w_4 + w_1 \cdot 2 \cdot w_3 + w_2 \cdot 1 \cdot w_2 + w_3 \cdot 0 \cdot w_1 + w_4 \cdot (-1) \cdot w_0 - \nu \cdot 3 \cdot 2 \cdot w_4 = 0$$

$$n=5 \Rightarrow \varepsilon^2 : w'_3 - 3x'_0 w_4 + w_0 \cdot 4 \cdot w_5 + w_1 \cdot 3 \cdot w_4 + w_2 \cdot 2 \cdot w_3 + w_3 \cdot 1 \cdot w_2 + w_4 \cdot 0 \cdot w_1 + w_5 \cdot (-1) \cdot w_0 - \nu \cdot 4 \cdot 3 \cdot w_5 = 0.$$

или

$$\begin{aligned} -E_0/w_0 &= w_0 + 2v = 0 & (n=0) \\ -E_1/w_0 &= w_1 + \varepsilon_t = 0 & (n=1) \\ E_2 &= (w_0)_t = 0 & (n=2) \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение Бюргерса удовлетворяет тесту Фукса – Ковалевской – Пенлеве, а его решение имеет требуемый произвол в две функции. Собирая члены, решение можно записать в виде

$$w(x, t) = -\frac{2v}{x - x_0(t)} + x'_0(t) + w_2(t)[x - x_0(t)]^1 + \dots, \quad (10)$$

где $x_0(t)$, $w_2(t)$ – произвольные функции.

Определение. Преобразование, задающее соотношением:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}uw = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial(uw)}{\partial x} = 0,$$

называется преобразованием Беклунда.

Определение. Преобразование, задающее соотношением: $w = \frac{2u_x}{u}$, называется

преобразованием Коула-Хопфа.

Для дальнейшего анализа уравнения Бюргерса используем разложение общего вида (2), где $w_n = w_n(x, t)$, $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$.

Решение ищем в виде:

$$w(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \varepsilon^n, \quad \varepsilon = \varepsilon(x, t).$$

Подставим в уравнение главный член разложения (2), что соответствует $n=0$

$$w(x, t) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} w_0(x, t) \Rightarrow w'_t = \frac{-\alpha}{\varepsilon^{\alpha+1}} \varepsilon'_t w_0 + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} w'_{0t}$$

$$w'_x = \frac{-\alpha}{\varepsilon^{\alpha+1}} \varepsilon'_x w_0 + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} w'_{0x},$$

$$\begin{aligned} w''_{xx} &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\varepsilon^{\alpha+2}} \varepsilon'^2_x \cdot w_0 - \frac{\alpha}{\varepsilon^{\alpha+1}} [\varepsilon''_{xx} w_0 + \varepsilon'_x w'_{0x}] - \\ &- \frac{\alpha}{\varepsilon^{\alpha+1}} \varepsilon'_x w'_{0x} + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} w''_{0x} \end{aligned}$$

После подстановки найденных производных в уравнение (3), получим:

$$\begin{aligned} \frac{-\alpha}{\varepsilon^{\alpha+1}} \varepsilon'_t w_0 + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} w'_{0t} + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} w_0 \left[\frac{-\alpha}{\varepsilon^{\alpha+1}} \varepsilon'_x w_0 + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} w'_{0x} \right] = \\ = v \left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{\varepsilon^{\alpha+2}} \varepsilon'^2_x \cdot w_0 - \frac{\alpha}{\varepsilon^{\alpha+1}} [\varepsilon''_{xx} w_0 + \varepsilon'_x w'_{0x}] - \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{\varepsilon^{\alpha+1}} \varepsilon'_x w'_{0x} + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} w''_{0x} \right] \end{aligned}$$

Из баланса ведущих сингулярных членов, надо оставить третье слагаемое в левой части и первое слагаемое в правой части, получим:

$$\frac{-\alpha}{\varepsilon^{2\alpha+1}} \varepsilon'_x w_0^2 = v \frac{\alpha(\alpha+1)}{\varepsilon^{\alpha+2}} \varepsilon'^2_x \cdot w_0,$$

$$2\alpha + 1 = \alpha + 2 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow -w_0^2 \varepsilon'_x = 2v \varepsilon'^2_x w_0 \Rightarrow$$

$$w_0 = -2v \varepsilon'_x, \quad (n=0).$$

Таким образом, решение(3) ищем в виде:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \varepsilon(x, t)^{n-1},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} (w'_{nt} \varepsilon^{n-1} + w_n (n-1) \varepsilon^{n-2} \varepsilon'_t),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} (w'_{nx} \varepsilon^{n-1} + w_n (n-1) \varepsilon^{n-2} \varepsilon'_x),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (w''_{nxx} \varepsilon^{n-1} + w'_{nxx} (n-1) \varepsilon^{n-2} \varepsilon'_x + \\ &+ (n-1) w'_{nx} \varepsilon^{n-2} \varepsilon'_x + (n-1) w_n [(n-2) \varepsilon^{n-3} \varepsilon'^2_x + \varepsilon^{n-2} \varepsilon''_{xx}]) \end{aligned}$$

Подставим в (3):

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (w'_{nt} \varepsilon^{n-1} + w_n (n-1) \varepsilon^{n-2} \varepsilon'_t) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} w_n \varepsilon^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (w'_{nx} \varepsilon^{n-1} + w_n (n-1) \varepsilon^{n-2} \varepsilon'_x) = \\ &= v \sum_{n=0}^{\infty} (w''_{nxx} \varepsilon^{n-1} + w'_{nxx} (n-1) \varepsilon^{n-2} \varepsilon'_x + (n-1) w'_{nx} \varepsilon^{n-2} \varepsilon'_x + \\ &+ (n-1) w_n [(n-2) \varepsilon^{n-3} \varepsilon'^2_x + \varepsilon^{n-2} \varepsilon''_{xx}]) \end{aligned}$$

Для удобства, воспользуемся свойством аддитивности суммы, получим:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} w'_{nt} \varepsilon^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) w_n \varepsilon'_t \varepsilon^{n-2} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} w_n \varepsilon^{n-1} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} w'_{nx} \varepsilon^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) w_n \varepsilon'_x \varepsilon^{n-2} \right) = \\ &= v \sum_{n=0}^{\infty} w''_{nxx} \varepsilon^{n-1} + v \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) w'_{nx} \varepsilon'_x \varepsilon^{n-2} + \\ &+ v \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) w'_{nx} \varepsilon'_x \varepsilon^{n-2} + \\ &+ v \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2) w_n \varepsilon'^2_x \varepsilon^{n-3} + v \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) w_n \varepsilon''_{xx} \varepsilon^{n-2}. \quad (11) \end{aligned}$$

Применяя операцию умножения и свойство дистрибутивности степенных рядов третье слагаемое в левой части уравнения (11) запишется:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} w_n \varepsilon^{n-1} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} w'_{nx} \varepsilon^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) w_n \varepsilon'_x \varepsilon^{n-2} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n \varepsilon^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w'_{nx} \varepsilon^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} w_n \varepsilon^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) w_n \varepsilon'_x \varepsilon^{n-2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (w_0 w'_{0x} + w_1 w'_{(n-1)x} + w_2 w'_{(n-2)x} + \dots + w_n w'_{0x}) \varepsilon^{n-2} + \\ &+ \varepsilon'_x \sum_{n=0}^{\infty} [w_0 (-w_0) + w_1 (n-2) w_{n-1} + w_2 (n-3) w_{n-2} + \dots + \\ &+ w_3 (n-4) w_{n-3} + \dots + w_n (-w_0)] \varepsilon^{n-3} \end{aligned} \quad (12)$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} w_n \varepsilon^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w'_{nx} \varepsilon^{n-1} = w_0 w'_{0x} \varepsilon^{-2} + (w_0 w'_{1x} + w_1 w'_{0x}) \varepsilon^{-1} + \\ &+ (w_0 w'_{2x} + w_1 w'_{1x} + w_2 w'_{0x}) \varepsilon^0 + (w_0 w'_{3x} + w_1 w'_{2x} + w_2 w'_{1x} + \\ &+ w_3 w'_{0x}) \varepsilon + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cdot \varepsilon^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \cdot w_n \varepsilon'_x \varepsilon^{n-2} = \varepsilon'_x (-w_0^2 \varepsilon^{-3} + \\
& + [w_0 \cdot 0 \cdot w_1 + w_1 (-w_0)] \varepsilon^{-2} + [w_0 \cdot w_2 + \\
& + w_1 \cdot 0 \cdot w_1 + w_2 \cdot (-w_0)] \varepsilon^{-1} + \\
& + [w_0 \cdot 2w_3 + w_1 \cdot w_2 + w_2 \cdot 0 \cdot w_1 + w_3 (-w_0)] \varepsilon^0 + \\
& + [w_0 \cdot 3w_4 + w_1 \cdot 2w_3 + w_2 \cdot w_2 + w_3 \cdot 0 \cdot w_1 + w_4 (-w_0)] \varepsilon^1 + \\
& + [w_0 \cdot 4w_5 + w_1 \cdot 3w_4 + w_2 \cdot 2w_3 + w_3 \cdot w_2 + w_4 \cdot 0 \cdot w_1 + \\
& + w_5 (-w_0)] \varepsilon^2 + \dots) \quad (14)
\end{aligned}$$

Собирая и приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим:

$$\begin{aligned}
n=0 & \Rightarrow \varepsilon^{-3} : -w_0^2 \varepsilon'_x - 2w_0 \varepsilon'^2_x = 0 \Rightarrow w_0 = -2v\varepsilon'_x \\
n=1 & \Rightarrow \varepsilon^{-2} : -w_0 \varepsilon'_t + w_0 w'_{0x} - w_0 w_1 \varepsilon'_x + 2w_0 \varepsilon'_x \varepsilon'_x + \\
& + w_0 \varepsilon''_{xx} = 0 \Rightarrow w_1 \varepsilon'_x - v\varepsilon''_{xx} + \varepsilon'_t = 0 \\
n=2 & \Rightarrow \varepsilon^{-1} : w'_{0t} + w_0 w'_{1x} + w_1 w'_{0x} + w_0 w_2 + w_1 0w_1 + \\
& + w_2 (-w_0) - w_0 \varepsilon''_{xx} = 0 \Rightarrow (w_1 \varepsilon'_x - v\varepsilon''_{xx} + \varepsilon'_t)'_x = 0 \\
n=3 & \Rightarrow \varepsilon^0 : w'_{1t} + w_2 \varepsilon'_t + w_0 w'_{2x} + w_1 w'_{1x} + w_2 w'_{0x} + \\
& + \varepsilon'_x (w_0 2w_3 + w_1 w_2 + w_2 0w_1 + w_3 (-w_0) - \\
& - w_0 \varepsilon''_{xx} - w_1 \varepsilon'_x \varepsilon'_x - w_2 \varepsilon'_x \varepsilon'_x - 2w_3 \varepsilon'^2_x - w_2 \varepsilon''_{xx}) = 0 \Rightarrow \\
& w'_{1t} - w_0 \varepsilon''_{xx} + w_1 w'_{1x} + (w_0 w_2)'_x + (\varepsilon'_t - v\varepsilon''_{xx}) w_2 - \\
& - 2v\varepsilon'_x \varepsilon'_x + \varepsilon'_x (w_1 w_2 + w_0 w_3) - 2v\varepsilon'^2_x w_3 = 0
\end{aligned}$$

Таким образом, получена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
w_0 & = -2v\varepsilon'_x \quad (n=0) \\
w_1 \varepsilon'_x - v\varepsilon''_{xx} + \varepsilon'_t & = 0 \quad (n=1) \\
(w_1 \varepsilon'_x - v\varepsilon''_{xx} + \varepsilon'_t)'_x & = 0 \quad (n=2) \\
w'_{1t} - w_0 \varepsilon''_{xx} + w_1 w'_{1x} + (w_0 w_2)'_x + (\varepsilon'_t - v\varepsilon''_{xx}) w_2 - 2v\varepsilon'_x \varepsilon'_x + \\
& + \varepsilon'_x (w_1 w_2 + w_0 w_3) - 2v\varepsilon'^2_x w_3 = 0 \quad (n=3)
\end{aligned} \quad (15)$$

Полагая в этих формулах $w_2=w_3=0$, получим согласованный обрыв разложения (2) с нулевыми высшими коэффициентами ($w_k=0$ при $k \geq 2$). Оставшиеся равенства позволяют представить решение в виде

$$\begin{aligned}
w & = w_0/\varepsilon + w_1, \quad w_0 = -2v\varepsilon'_x, \\
\varepsilon_t + w_1 \varepsilon'_x & = v\varepsilon''_{xx}, \quad (w_1)_t + w_1 (w_1)_x = v(w_1)_{xx}.
\end{aligned}$$

Эти соотношения представляют собой преобразование Беклунда и позволяют строить по одним решениям уравнения Бюргерса $w_1=w_1(x,t)$ другие решения $w=w(x,t)$. Если выбрать за исходное решение $w_1=0$, то получим известное преобразование Коула – Хопфа $w=-2v\varepsilon'_x/\varepsilon$ сводящее решение нелинейного уравнения Бюргерса к решению линейного уравнения теплопроводности $\varepsilon_t=v\varepsilon''_{xx}$.

Рассмотрим модельную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = T \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} = T \frac{\partial}{\partial x} \left[v \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial w}{\partial t} = T \frac{\partial}{\partial x} \left[w \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} \end{cases}, \quad (16)$$

которая описывает процесс нагнетания воздуха в угольный пласт. При предположениях сделанных в [1] надо решать первое уравнение системы (16).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (17)$$

Подставим в (17) главный член разложения (1), получим

$$\begin{aligned}
u(x,t) & = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} u_0(t) \Rightarrow u'_t = \frac{-\alpha \cdot \varepsilon'_t \cdot u_0}{\varepsilon^{\alpha+1}} + \frac{u'_0}{\varepsilon^\alpha} = \\
& = \frac{\alpha \cdot x'_0 \cdot u_0}{\varepsilon^{\alpha+1}} + \frac{u'_0}{\varepsilon^\alpha} \\
u'_x & = \frac{-\alpha u_0 \varepsilon'_x}{\varepsilon^{\alpha+1}} = \frac{-\alpha u_0}{\varepsilon^{\alpha+1}}, \quad u''_{xx} = \frac{(-\alpha) \cdot (-\alpha+1) \cdot u_0}{\varepsilon^{\alpha+2}} = \\
& = \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot u_0}{\varepsilon^{\alpha+2}}
\end{aligned}$$

После подстановки найденных производных в уравнение (17), получим:

$$\frac{\alpha x'_0 u_0}{(x-x_0)^{\alpha+1}} + \frac{u'_0}{(x-x_0)^\alpha} = T_0 \left[\frac{\alpha^2 u_0^2}{(x-x_0)^{2\alpha+2}} + \frac{\alpha(\alpha+1) u_0^2}{(x-x_0)^{2\alpha+2}} \right],$$

где $x_0=x_0(t)$, $u_0=u_0(t)$, штрих обозначает производную по t . Из баланса старших сингулярных членов (учитывается правая часть), следует

$$\alpha = 0, \quad u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \varepsilon^n, \quad \varepsilon = x - x_0(t)$$

Вычисляем производные и подставляем в (17).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} & = \sum_{n=0}^{\infty} n u_n \varepsilon^{n-1} \varepsilon'_x \\
\frac{\partial u}{\partial t} & = \sum_{n=0}^{\infty} (u'_n \varepsilon^n + u_n \cdot n \cdot \varepsilon^{n-1} \varepsilon'_t) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) u_n \varepsilon^{n-2} \varepsilon'_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (u'_n \varepsilon^n + u_n \cdot n \cdot \varepsilon^{n-1} \varepsilon'_t) & = T_0 \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} n u_n \varepsilon^{n-1} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) u_n \varepsilon^{n-2} \right] \quad (18)
\end{aligned}$$

Применяем операцию возведения степенного ряда в квадрат:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_n a_0) x^n \quad (19)$$

В нашем случае $a_n = u_n$.

$$\begin{aligned} (\sum_{n=0}^{\infty} n u_n \varepsilon^{n-1})^2 = & \sum_{n=0}^{\infty} (0 \cdot w_0 \cdot n \cdot u_n + 1 \cdot w_1 \cdot (n-1) \cdot u_{n-1} + \\ & + 2 \cdot w_2 \cdot (n-2) \cdot u_{n-2} + \dots + (n-1) \cdot u_{n-1} \cdot 1 \cdot u_1 + \\ & + n \cdot u_n \cdot 0 \cdot w_0) \varepsilon^{n-1}, \end{aligned}$$

или в удобной форме:

$$n=0 \Rightarrow \varepsilon^{-1} : 0$$

$$n=1 \Rightarrow \varepsilon^0 : 1 \cdot u_1 \cdot 1 \cdot u_1 = u_1^2$$

$$n=2 \Rightarrow \varepsilon^1 : 1 \cdot u_1 \cdot 2 \cdot u_2 + 2 \cdot u_2 \cdot 1 \cdot u_1 = 4u_1 u_2$$

$$n=3 \Rightarrow \varepsilon^2 : 1 \cdot u_1 \cdot 3 \cdot u_3 + 2 \cdot u_2 \cdot 2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 \cdot 1 \cdot u_1 = 6u_1 u_3 + 4u_2^2$$

$$n=4 \Rightarrow \varepsilon^3 : 1 \cdot u_1 \cdot 4 \cdot u_4 + 2 \cdot u_2 \cdot 3 \cdot u_3 + 3 \cdot u_3 \cdot 2 \cdot u_2 + 4 \cdot u_4 \cdot 1 \cdot u_1 = 8u_1 u_4 + 12u_2 u_3$$

$$n=5 \Rightarrow \varepsilon^4 : 1 \cdot u_1 \cdot 5 \cdot u_5 + 2 \cdot u_2 \cdot 4 \cdot u_4 + 3 \cdot u_3 \cdot 3 \cdot u_3 + 4 \cdot u_4 \cdot 2 \cdot u_2 + 5u_5 \cdot 1 \cdot u_1 = 10u_1 u_5 + 16u_2 u_4 + 9u_3^2$$

$$n=k \Rightarrow \varepsilon^{k-1} : 1 \cdot u_1 \cdot k \cdot u_k + 2 \cdot u_2 \cdot (k-1) \cdot u_{k-1} + 3 \cdot u_3 \cdot (k-2) \cdot u_{k-2} + \dots + (k-1) \cdot u_{k-1} \cdot 2 \cdot u_2 + k \cdot u_k \cdot 1 \cdot u_1$$

Применяем операцию умножения степенных рядов в форме (5):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) u_n \varepsilon^{n-2} = & \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) u_0 u_{n+2} + \\ & + n(n+1) u_1 u_{n+1} + (n-1) n u_2 u_n + (n-2)(n-1) u_3 u_{n-1} + \\ & + \dots + (n-k)(n-(k-1)) u_{k+1} u_{n-(k-1)} + \dots + 1 \cdot 2 u_n u_2] \varepsilon^n \end{aligned}$$

$$\varepsilon^0 : 1 \cdot 2 \cdot u_0 \cdot u_2, \quad \varepsilon^1 : 2 \cdot 3 \cdot u_0 \cdot u_3 + 1 \cdot 2 \cdot u_1 \cdot u_2,$$

$$\varepsilon^2 : 3 \cdot 4 \cdot u_0 \cdot u_4 + 2 \cdot 3 \cdot u_1 \cdot u_3 + 1 \cdot 2 \cdot u_2^2,$$

$$\varepsilon^3 : 4 \cdot 5 \cdot u_0 \cdot u_5 + 3 \cdot 4 \cdot u_1 \cdot u_4 + 2 \cdot 3 \cdot u_2 \cdot u_3 + 1 \cdot 2 \cdot u_3 \cdot u_2,$$

$$\varepsilon^4 : 5 \cdot 6 \cdot u_0 \cdot u_6 + 4 \cdot 5 \cdot u_1 \cdot u_5 + 3 \cdot 4 \cdot u_2 \cdot u_4 + 2 \cdot 3 \cdot u_3^2 + 1 \cdot 2 \cdot u_4 \cdot u_2,$$

$$\varepsilon^5 : 6 \cdot 7 \cdot u_0 \cdot u_7 + 5 \cdot 6 \cdot u_1 \cdot u_6 + 4 \cdot 5 \cdot u_2 \cdot u_5 + 3 \cdot 4 \cdot u_3 \cdot u_4 + 2 \cdot 3 \cdot u_4 \cdot u_3 + 1 \cdot 2 \cdot u_5 \cdot u_2,$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в (18) получим:

$$\varepsilon^0 : u'_0 + u_1 \varepsilon'_t = T_0 (u_1^2 + 2u_0 u_2),$$

$$\varepsilon^1 : u'_1 + 2u_2 \varepsilon'_t = T_0 (6u_1 u_2 + 6u_0 u_3),$$

$$\varepsilon^2 : u'_2 + 3u_3 \varepsilon'_t = T_0 (12u_1 u_3 + 12u_0 u_4 + 6u_2^2), \quad (20)$$

$$\varepsilon^3 : u'_3 + 4u_4 \varepsilon'_t = T_0 (20u_1 u_4 + 12u_2 u_3 + 20u_0 u_5),$$

$$\varepsilon^4 : u'_4 + 5u_5 \varepsilon'_t = T_0 (30u_1 u_5 + 30u_2 u_4 + 15u_3^2 + 30u_0 u_6).$$

Если выполнить согласованный обрыв $u_k=0$, при $k \geq 3$, тогда:

1⁰. Если положить $\varepsilon'_t = 0$, то получим решение:

$$u = \frac{-3T_0}{2t} + \frac{C}{\sqrt[3]{t}} + \frac{(x+C)}{t} - \frac{1}{6T_0 t} (x+C)^2$$

Это решение было получено в [1] (метод №3).

2⁰. Если $u_1=0$, то решение:

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{t}} - \frac{1}{6T_0 t} (x+C)^2$$

3⁰. Если $u_0=0$, то решение:

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} (x + 3T_0 \sqrt[3]{t}) - \frac{1}{6T_0 t} (x + 3T_0 \sqrt[3]{t})^2$$

Для дальнейшего анализа уравнения (17) используем разложение общего вида (2).

Из баланса ведущих членов, как и в предыдущем случае следует, что $\alpha=0$. Поэтому решение ищем в виде степенного ряда общего вида:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \varepsilon^n, \quad \varepsilon = \varepsilon(x, t). \quad (21)$$

Ввиду того, что аналитические трудности нарастают при взятии большого количества слагаемых в (20), выполняем согласованный обрыв при $k \geq 2$.

$$u = u_0 + u_1 \varepsilon \quad (22)$$

$$u'_t = u'_{0t} + u'_{1t} \varepsilon + u_1 \varepsilon'_t, \quad u'_x = u'_{0x} + u'_{1x} \varepsilon + u_1 \varepsilon'_x,$$

$$u''_{xx} = u''_{0xx} + u''_{1xx} \varepsilon + u'_{1x} \varepsilon'_x + u'_{1x} \varepsilon'_x + u_1 \varepsilon''_{xx} = u''_{0xx} + u''_{1xx} \varepsilon + 2u'_{1x} \varepsilon'_x + u_1 \varepsilon''_{xx}$$

Подставляем производные в (17):

$$u'_{0t} + u'_{1t} \varepsilon + u_1 \varepsilon'_t = T_0 [(u'_{0x} + u'_{1x} \varepsilon + u_1 \varepsilon'_x)^2 +$$

$$+ (u_0 + u_1 \varepsilon)(u''_{0xx} + u''_{1xx} \varepsilon + 2u'_{1x} \varepsilon'_x + u_1 \varepsilon''_{xx})]$$

$$u'_{0t} + u'_{1t} \varepsilon + u_1 \varepsilon'_t = T_0 [(u'^2_{0x} + u'^2_{1x} \varepsilon^2 + u_1^2 \varepsilon'^2_x + 2u'_{0x} u'_{1x} \varepsilon +$$

$$+ 2u'_{0x} u_1 \varepsilon'_x + 2u'_{1x} u_1 \varepsilon'_x \varepsilon + u_0 u''_{0xx} + u_0 u''_{1xx} \varepsilon + 2u_0 u'_{1x} \varepsilon'_x +$$

$$+ u_0 u_1 \varepsilon''_{xx} + u_1 u''_{0xx} \varepsilon + u_1 u''_{1xx} \varepsilon^2 + 2u_1 u'_{1x} \varepsilon'_x \varepsilon + u_1^2 \varepsilon''_{xx} \varepsilon]$$

Собираем члены при одинаковых степенях ε в последнем равенстве, получим:

$$\varepsilon^0 : u'_{0t} + u_1 \varepsilon'_t = T_0 [u'^2_{0x} + u_1^2 \varepsilon'^2_x + 2u'_{0x} u_1 \varepsilon'_x + u_0 u''_{0xx} +$$

$$2u_0 u'_{1x} \varepsilon'_x + u_0 u_1 \varepsilon''_{xx}]$$

$$\varepsilon^1 : u'_{1t} = T_0 [2u'_{0x} u'_{1x} + 4u'_{1x} u_1 \varepsilon'_x + u_0 u''_{1xx} + u_1 u''_{0xx} + u_1^2 \varepsilon''_{xx}]$$

$$\varepsilon^2 : 0 = T_0 [u'^2_{1x} + u_1 u''_{1xx}]$$

Введем дополнительные условия:

$$u_0 = u_1 = \varphi(t) \quad (23)$$

Эти условия оправданы тем, что $u'_{0x} = u'_{1x} = 0$ и последняя система уравнений упрощается.

$$\begin{cases} \varphi' + \varphi \varepsilon'_t = T_0 [\varphi^2 \varepsilon'^2_x + \varphi^2 \varepsilon''_{xx}] \\ \varphi' = T_0 \varphi^2 \varepsilon''_{xx} \end{cases} \quad (24)$$

Из второго уравнения системы (24):

$$\varepsilon''_{xx} = \frac{\varphi'}{T_0 \varphi^2} \Rightarrow \varepsilon'_x = \frac{\varphi'}{T_0 \varphi^2} x, \quad \varepsilon = \frac{\varphi'}{2T_0 \varphi^2} x^2$$

$$\varphi' + \varphi \varepsilon'_t = T_0 [\varphi^2 \varepsilon'^2_x + \varphi^2 \frac{\varphi'}{T_0 \varphi^2}] \Rightarrow \varphi \varepsilon'_t = T_0 \varphi^2 \varepsilon'^2_x$$

$$\Rightarrow \varepsilon'_t = T_0 \varphi \varepsilon'^2_x.$$

$$\frac{x^2}{2T_0} (\frac{\varphi'}{\varphi^2})' = T_0 \varphi \varepsilon'^2_x \Rightarrow \frac{x^2}{2T_0} (\frac{\varphi'' \varphi^2 - 2\varphi \varphi'^2}{\varphi^4}) = T_0 \varphi \varepsilon'^2_x$$

$$\frac{x^2}{2T_0} (\frac{\varphi'' \varphi^2 - 2\varphi \varphi'^2}{\varphi^4}) = T_0 \varphi \frac{\varphi'^2 x^2}{T_0 \varphi^4} \Rightarrow \varphi'' \varphi^2 - 2\varphi \varphi'^2 =$$

$$= 2\varphi'^2 \varphi \Rightarrow \varphi'' \varphi - 4\varphi'^2 = 0.$$

Замена:

$$\varphi' = p(\varphi) \Rightarrow \varphi'' = p' \varphi' = p' p \Rightarrow p' p \varphi - 4p^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{d\varphi} \varphi = 4p \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = 4 \int \frac{d\varphi}{\varphi} \Rightarrow \ln |p| = \ln |\varphi|^4 \Rightarrow$$

$$p = \varphi^4 \Rightarrow \varphi' = \varphi^4 \Rightarrow \int \frac{d\varphi}{\varphi^4} = \int dt \Rightarrow \varphi^{-3} = -3t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi^3 = -\frac{1}{3t} \Rightarrow \varphi = -\frac{1}{\sqrt[3]{3t}}$$

Подставляем в (22), получим решение:

$$u = -\frac{1}{\sqrt[3]{3t}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3t}} \frac{x^2}{2T_0 \sqrt[3]{9t^2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{3t}} - \frac{x^2}{6T_0 t}$$

Это решение было получено в [1] (метод №4).

Заключение

При тестировании первого уравнения системы (16) методом Фукса - Ковалевской - Пенлеве, было установлено следующее:

Первое. Отсутствует особенность типа подвижного полюса, а присутствует алгебраическая точка ветвления. Поэтому решение искалось в виде степенного ряда общего вида.

Список использованной литературы

1. Добровольский Ю.Н. Поиск аналитического решения модельной задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде (на примере пневмообработки угольного пласта)// Наукові праці ДонНТУ. Серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка». Вип. 1 (17). – Донецьк:ДонНТУ. – 2013. – С.85-93.
2. Добровольский Ю.Н. Расширение группы методов поиска аналитического решения модельной задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде (на примере пневмообработки угольного пласта)// Наукові

Второе. Поскольку с функциональной точки зрения все уравнения системы (16) имеют одинаковую природу, то этим свойством обладают и остальные уравнения системы.

Третье. При взятии достаточно большого числа слагаемых в разложении (1) или (2) трудности аналитического решения быстро нарастают, поэтому был выполнен согласованный обрыв членов ряда начиная с некоторого k. В противном случае, можно использовать систему символьных вычислений. Например, пакет Maple V или Maple VII.

Четвертое. Полезность полученных результатов заключается в том, что подбирая исходное решение таким образом, чтобы по ним можно по априори выйти на нужный исследователю результат.

Пятое. В следующей статье будет показано, как применить разложение (1), (2) к системе (16) или найти преобразование (если оно существует) линеаризующее данную систему.

праці ДонНТУ. Серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка». Вип. 1 (19). – Донецьк:ДонНТУ. – 2014. – С.78-87.

3. Павлыш В.Н., Добровольский Ю.Н. Численное решение задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде (на примере пневмообработки угольного пласта)// Збірник науково-методичних робіт ДонНТУ, кафедра "Вища математика". Вип. 3. – Донецьк: ДонНТУ. – 2005. – С.170-177.
4. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных. – М.:Наука, 1966. – 320 с.

Ю.М. ДОБРОВОЛЬСЬКИЙ

Донецький національний технічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕСТУ ФУКСА - КОВАЛЕВСЬКОЇ - ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ РІШЕННЯ МОДЕЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПРО НАПІРНУ ФІЛЬТРАЦІЮ ГАЗОВОЇ СУМІШІ В СУЦІЛЬНОМУ СЕРЕДОВИЩІ (НА ПРИКЛАДІ ПНЕВМООБРОБКИ ВУГІЛЬНОГО ШАРУ).

Уперше запропонований тест Фукса - Ковалевської - Пенлеве для рішення модельної задачі про напірну фільтрацію газовой суміші в суцільному середовищі.

Ключові слова: рухливий полюс, алгебраїчна крапка розгалуження, логарифмічна крапка розгалуження, істотно особлива крапка, рівняння й трансценденти Пенлеве, сингулярне різноманіття, резонанс, рівняння Бюргерса, перетворення Беклунда, перетворення Коула-Хопфа.

YU.N. DOBROVOLSKY

Donetsk national technical university

APPLICATION OF TEST OF FUCHS - KOVALEVSKAYA - PAINLEVE FOR THE SOLUTION OF A MODEL TASK OF A PRESSURE FILTRATION OF GAS MIX IN THE SOLID ENVIRONMENT (ON THE EXAMPLE OF PNEUMOPROCESSING OF COAL STRATUM).

In this article test of Fuchs - Kovalevskaya - Painleve for the solution of a model task on a pressure filtration of gas mix in the solid environment is offered. Need of application of this test is explained by that is established by numerous researches that many known integrated nonlinear equations of mathematical physics possess property

Fuchs - Kovalevskaya – Painleve. Also new equations with such property were found. When checking more difficult equations and systems of the equations on Fuchs test - resonances with high numbers can appear Kovalevskaya – Painleve. Thus difficulties of the analytical solution quickly increase. However in a type of a high algorithmichnost the test allows successful use of methods of symbolical calculations. For example, by means of Maple V system it was succeeded to carry out full classification of integrated cases of the equations of small water with dissipation and dispersion of the lowest orders. The idea of a method consists in the following. By analogy to the ordinary differential equations of the solution of the equations to private derivatives it is possible to look for in the form of the decomposition containing feature like a mobile pole. The position of a pole is set by means of any function. Originally the solution is looked for in neighborhood of singular diversity $x-x_0(t)=0$ in the form of the expansion justified in article, where an index α – the integral positive number that provides polar nature of mobile feature of the solution. The $x_0(t)$ function is considered arbitrary. The received decision will be the general if this expansion includes arbitrary functions, and number of these functions equally to an order of the considered equation. Further the solution of a partial equation look for in neighborhood of singular diversity $\varepsilon(x, t)=0$ in the look set to article - the generalized expansion of the symmetric on independent variables. It is shown how test of Fuchs – Kovalevskaya – Painleve for the Burgers equation well works. It is set that there is one resonance of $n=2$ for which the compatibility ratio therefore its solution has a required arbitrariness in two functions is satisfied. When testing the first equation of the considered system by method of Fuchs - Kovalevskaya – Painleve, set the following:

The first. As both items of the right member of equation have square nonlinearity, there is no feature like a mobile pole, and there is an algebraic point of branching. Therefore the decision was looked for in the form of a power series of a general view. Some solution completely matching the solutions found in the author the early are thus received.

The second. As from the function point of sight all equations of system have the identical nature, this property the remaining equations of system possess also.

The third. When taking rather large number of items in one or other expansion, difficulty of the analytical solution quickly rise therefore the coordinated breakaway of members of a row since some k was executed. Otherwise, it is possible to use system of character computation, for example, Maple V or Maple VII packet.

The fourth. Usefulness of the received results is that selecting the initial solution thus, on them it is possible to quit a priori on the result necessary to the researcher.

The fifth. In the following article it will be shown how to apply the received expansions to this system or to find conversion (if it exists), linearizing this system.

*Статья поступила в редакцию 21.08.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом*