УДК 5.12.64:514.12

Формулы понижения натуральной степени тригонометрических функций в интегральном исчислении

Л.П. Мироненко, Ю.В. Пустовая
Донецкий национальный технический университет
Julia-Pustovaa@mail.ru

Мироненко Л.П., Пустовая Ю.В. Формулы понижения натуральной степени тригонометрических функций в интегральном исчислении. *Аннотация.*
Целью статьи является продвижение формул понижения натуральной степени функций $\cos^n x$ и $\sin^n x$ в различные разделы математики, в частности, в интегральное исчисление. Получены формулы, позволяющие более эффективно вычислять интегралы от рациональных дробей специального вида. Предложено новое представление формулы Валлиса вычисления числа π. Формулы понижения дают ряд новых формул тригонометрии или, по крайней мере, общую методику получения большого числа формул тригонометрии.

Введение

Формулы понижения натуральной степени тригонометрических функций $\cos^n x$ и $\sin^n x$ в математическом анализе, в частности, в тригонометрии, обычно используются в случае $n=2$ [2,4,5]. В случае произвольного значения n $(n>2)$ они практически не встречаются в литературе. Тем не менее, эти формулы легко записать в компактной форме и эффективно использовать в интегральном исчислении.

В работе предлагается оригинальный способ получения формул понижения степени с помощью известной формулы Эйлера в теории функций комплексного переменного.

В качестве приложения рассмотрены две классические задачи – вычисление интеграла от стандартной (элементарной) рациональной дроби повышенной сложности и формулы Валлиса, представляющей способ вычисления числа π.

Основной целью статьи является продвижение формул понижения в различные математические методы исследования.

Изложение основного материала

1. Понижение степени функций $\cos^n x$ и $\sin^n x$

Рассмотрим задачу выражения функций $\cos^n x$ и $\sin^n x$ через линейную комбинацию функций $\cos kx$ и $\sin kx$.

Для этого представим $\cos x$ в виде $\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$. Тогда,

$$\cos^n x=\frac{1}{2^n}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^n=\frac{e^{-nix}}{2^n}\left(1+e^{2ix}\right)^n.$$

Применим бином Ньютона $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$, где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ - биномиальные коэффициенты, получим

$$\begin{aligned}\cos^n x&=\frac{e^{-nix}}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{2ix(n-k)}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{ix(n-2k)}=\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos x(n-2k)+i\sin x(n-2k)).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь использована формула Эйлера $e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$ при $\phi=x(n-2k)$. Левая часть равенства (1.1) является действительной функцией, а правая часть является комплексной. Следовательно, при любых n должно выполняться равенство

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin x\left(n-2k\right)=0\,. \tag{1.2}$$

Это равенство легко проверяется с учетом свойства коэффициентов $C_n^k=C_n^{n-k}$ [1,3]. В сумме (1.2) всегда существует равный и противоположный по знаку член.

В результате получим формулу, которая решает задачу.

$$\cos^n x=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos\ \left(n-2k\right)x. \tag{1.3}$$

Это представление можно рассматривать как обобщение формулы понижения степени

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$. В самом деле, в случае $n=2$ имеем хорошо известную формулу

$$\cos^2 x = \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{2} C_2^k \cos\ \left(2-2k\right)x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Выделим в сумме (1.3) слагаемое с номером $k=n/2$, при котором косинус равен единице

$$\cos^n x = \frac{C_n^{n/2}}{2^n} + \frac{1}{2^n}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq n/2}}^{n} C_n^k \cos\ \left(n-2k\right)x. \qquad (1.4)$$

С некоторыми изменениями поступим аналогично с функцией $\sin x$, записав ее в виде $\dfrac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$

$$\sin^n x = \frac{e^{-ixn}}{2^n i^n}\left(e^{i2x}-1\right)^n = \frac{e^{-ixn}}{2^n i^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k e^{i2x\,(n-k)} =$$

$$= \frac{1}{2^n i^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k e^{ix(n-2k)}.$$

Представим мнимую единицу i в экспоненциальной форме $i = e^{i\pi/2}$ и применим формулу Эйлера

$$\sin^n x = \frac{1}{2^n} e^{-in\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k e^{ix(n-2k)} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k e^{ix(n-2k)-in\frac{\pi}{2}},$$

$$e^{ix(n-2k)-in\frac{\pi}{2}} = \cos\left(x\left(n-2k\right)-n\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ i\sin\left(x\left(n-2k\right)-n\frac{\pi}{2}\right).$$

Учтем, что имеет место аналогичное равенству (1.2) тождественное равенство

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \sin\left(x\ \left(n-2k\right)-n\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

В результате получим искомую формулу

$$\sin^n x = \frac{1}{2^n}\ \sum_{k=0}^{n}\ (-1)^k C_n^k \cos\ \left(x\ \left(n-2k\right)-n\frac{\pi}{2}\right)$$

(1.5)

Эту формулу можно рассматривать как обобщение формулы понижения степени для $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$. В самом деле, в случае $n=2$ имеем хорошо известную формулу

$$\sin^2 x = \frac{1}{2^2}\ \sum_{k=0}^{2} (-1)^k C_2^k \cos\ \left(x\ \left(2-2k\right)-\pi\right) = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Выделим в сумме (1.5) член с номером $k=n/2$

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{n/2} C_n^{n/2}}{2^n}\cos\ \left(n\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2^n}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq n/2}}^{n}\ (-1)^k C_n^k \cos\ \left(x\left(n-2k\right)-n\frac{\pi}{2}\right). \qquad (1.6)$$

Рассмотрим некоторые свойства формул (1.3), (1.6). Прежде всего, запишем равенства для четных и нечетных n. Формула (1.4) при четном $n=2m$ имеет вид

$$\cos^{2m} x = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq m}}^{2m} C_{2m}^k \cos\ 2\left(m-k\right)x.$$

Учитывая свойство биномиальных коэффициентов $C_{2m}^k = C_{2m}^{2m-k}$, получим

$$\cos^{2m} x = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2\ \left(m-k\right)x.$$

(1.7)

Если $n=2m+1$ - нечетное число, то

$$\cos^{2m+1} x = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos\ \left(2m+1-2k\right)x.$$

(1.8)

Аналогичные формулы получим для синуса

$$\sin^{2m} x = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+m} C_{2m}^k \cos 2\left(m-k\right)x,$$

(1.9)

$$\sin^{2m+1} x = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}\ (-1)^{k+m} C_{2m+1}^k \sin x\left(2m+1-2k\right). \qquad (1.10)$$

Здесь использовано равенство

$$\cos\ \left(x-\left(2m+1\right)\frac{\pi}{2}\right) = \left(-1\right)^m \sin x.$$

Рассмотрим обратную задачу выражения функций $\cos kx$ и $\sin kx$ через линейную комбинацию функций $\cos^n x$ и $\sin^n x$

Для этого представим $\cos nx$ в виде $\dfrac{1}{2}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)$. Тогда,

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left((e^{ix})^n + (e^{-ix})^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((\cos x + i\sin x)^n + (\cos x - i\sin x)^n\right).$$

Применим бином Ньютона, получим

$$\cos nx = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \cos^{n-k} x\cdot\sin^k x(1+(-1)^k) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \cos^{n-k} x\cdot\sin^k x(1+(-1)^k).$$

В сумме остаются только четные значения $k=2m$

$$\cos nx = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^{2m} \cos^{n-2m} x\cdot\sin^{2m} x.$$

Например,

$$\cos 2x = C_2^0 \cos^2 x - C_2^2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\cos 3x = C_3^0 \cos^3 x - C_3^2 \cos x \cdot \sin^2 x =$$
$$= \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) =$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Аналогично,

$$\sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = \frac{1}{2i}\left((e^{ix})^n - (e^{-ix})^n\right). =$$
$$= \frac{1}{2i}\left((\cos x + i\sin x)^n - (\cos x - i\sin x)^n\right). =$$
$$\sin nx = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \cos^{n-k} x \cdot \sin^k x(1-(-1)^k)$$

В сумме остаются только нечетные значения $k = 2m+1$

$$\sin nx = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^{2m+1} \cos^{n-2m-1} x \cdot \sin^{2m+1} x)$$

Например, $\sin 2x = 2\cos x \cdot \sin x$,

$$\sin 3x = (-1)^0 C_3^1 \cos^2 x \cdot \sin x + (-1)^1 C_3^3 \cos^0 x \cdot \sin^3 x =$$
$$= 3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x = 3(1-\sin^2 x)\cdot \sin x - \sin^3 x =$$
$$= -4\sin^3 x + 3\sin x.$$

2. Интеграл от рациональной дроби специального вида. Формула Валлиса

2.1. Постановка задачи

При интегрировании рациональных дробей возникает проблема вычисления дроби вида $\int \frac{Mt+N}{(t^2+pt+q)^n}dt,\ n \in N,\ \ \frac{p^2}{4} - q < 0$ [2,4]. Надлежащей заменой переменной и преобразованием числителя дроби, задача сводится к вычислению интеграла

$$K_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}. \qquad (2.1)$$

В случае $n = 1$ интегрирование элементарно

$$K_1 = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$$

В общем случае, интеграл (2.1) вычисляется с помощью рекуррентного соотношения [2,5,6], в котором K_n выражается через K_{n-1}

$$K_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} K_{n-1}. \qquad (2.2)$$

Поскольку интеграл K_1 известен, то, полагая в (2.2) $n = 2$, без труда находим интеграл K_2. Зная K_2, найдем K_3 и т.д. Например,

$$K_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}K_1 =$$
$$= \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} arctg \frac{x}{a} + C.$$

Следующий интеграл K_3 гораздо сложнее, а в общем случае формула (2.2) дает необозримые выражения.

Задачу можно решить проще [7]. Для этого в интеграле (2.1) сделаем замену $x = a \cdot tgt$ и применить представление (1.7).

2.2. Вычисление интеграла K_n

В интеграле K_n сделаем замену $x = a \cdot tgt$, $dx = a\cos^{-2} t dt$, $(x^2+a^2)^n = a^{2n}\cos^{-2n} t$, получим

$$K_n = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \cos^{2(n-1)} t dt. \qquad (2.3)$$

В интеграл (2.3) подставим представление (1.7)

$$K_n = \frac{C_{2(n-1)}^{n-1}}{2^{2(n-1)} a^{2n-1}} \int dt +$$
$$+ \frac{1}{2^{2n-3} a^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} C_{2(n-1)}^k \int \cos\left(2\left(n-1-k\right)t\right)\, dt.$$

Интегрирование выполняется элементарно

$$K_n = \frac{1}{2^{2(n-1)} a^{2n-1}} *$$
$$* \left(C_{2(n-1)}^{n-1} t + \sum_{k=0}^{n-2} C_{2(n-1)}^k \frac{\sin\left(2t((n-1-k)\right)}{n-1-k} \right) + C. \qquad (2.4)$$

Сравнение формулы (2.4) с рекуррентным соотношением (2.2) позволяет сделать вывод о преимуществе формулы (2.4). Например, если возникнет необходимость вычислить определенный интеграл (особенно, при больших n), то проще это сделать с помощью формулы (2.4), а не по формуле (2.2). Покажем это на примере.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^3} dx$.

1 способ (при помощи рекуррентного соотношения (2.2)).

$$\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^3} dx = \frac{x}{16\left(x^2+4\right)^2} + \frac{3}{16}\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^2} dx =$$
$$= \frac{x}{16\left(x^2+4\right)^2} + \frac{3}{16}\left(\frac{x}{8\left(x^2+4\right)} \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2+4} dx \right) =$$
$$= \frac{x}{16\left(x^2+4\right)^2} + \frac{3x}{128\left(x^2+4\right)} + \frac{3}{256} arctg \frac{x}{2} + C$$

2 способ (при помощи формулы (2.4)).

$$\int \frac{1}{\left(x^2+4\right)^3}dx =$$

$$= \frac{1}{512}\left(C_4^2 t + \sum_{k=0}^{1} C_4^k \frac{\sin\left(2t\left(2-k\right)\right)}{2-k} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{512}\left(C_4^2 t + C_4^0 \frac{\sin 4t}{2} + C_4^1 \sin 2t \right) + C =$$

$$= \frac{3}{256}t + \frac{1}{1024}\sin 4t + \frac{1}{128}\sin 2t + C =$$

$$= \left\{ t = arctg\frac{x}{2} \right\} =$$

$$= \frac{3}{256}arctg\frac{x}{2} + \frac{1}{1024}\sin 4arctg\frac{x}{2} +$$

$$+ \frac{1}{128}\sin 2arctg\frac{x}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{256}arctg\frac{x}{2} + \frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2} - \frac{x}{128\left(x^2+4\right)} +$$

$$+ \frac{4x}{128\left(x^2+4\right)} + C =$$

$$= \frac{3}{256}arctg\frac{x}{2} + \frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2} + \frac{3x}{128\left(x^2+4\right)} + C$$

Кроме того, подход позволяет логически продолжить исследования и получить, например, формулу Валлиса.

Приведем первые значения K_n

$$K_2 = \frac{1}{4a^3}\left(2t + \sin 2t\right) + C,$$

$$K_3 = \frac{1}{32a^5}\left(12t + \sin 4t + 8\sin 2t\right) + C \text{ и т.д.}$$

2.3. Вычисление интегралов I_n, J_n

Вычислим интегралы $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n tdt$, $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n tdt$, используя представления функций $\cos^n x$ и $\sin^n x$ в виде (1.7) - (1.10). Для функции (1.7) учтем, что

$$\int_0^{\pi/2} dt\cos\left(2\left(m-k\right)\ t\right) = 0 \text{ , } m \neq k \text{ ,} \tag{2.5}$$

получим

$$I_{2m} = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}\int_0^{\pi/2} dt +$$

$$+ \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \int_0^{\pi/2} dt\cos 2\left(m-k\right)t = \frac{\pi}{2^{2m+1}}C_{2m}^m,$$

$$I_{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \int_0^{\pi/2} dt\cos\ \left(2m+1-2k\right)\ t =$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \frac{\sin\left(\left(2m+1-2k\right)\frac{\pi}{2}\right)}{2m+1-2k} =$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} \frac{\left(-1\right)^{m+k} C_{2m+1}^k}{2m+1-2k}.$$

Для функции (1.9) учтем равенство (2.5), получим

$$J_{2m} = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}}\int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+m} C_{2m}^k \int_0^{\pi/2} dt\cos 2\left(m-k\right)\ t =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2m+1}}C_{2m}^m.$$

Неудивительно, что $I_{2m} = J_{2m}$. Это очевидное равенство $\int_0^{\pi/2} \cos^n tdt = \int_0^{\pi/2} \sin^n tdt$, если в одном из интегралов сделать замену $t = \frac{\pi}{2} - y$. По этой причине $J_{2m+1} = I_{2m+1}$

$$J_{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} C_{2m+1}^k \int_0^{\pi/2} dt\sin\left(\left(2m+1-2k\right)\right)\ t =$$

$$= -\frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} C_{2m+1}^k \frac{\cos\ \left(2m+1-2k\right)\pi/2-1}{2m+1-2k} =$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k+m} C_{2m+1}^k}{2m+1-2k}.$$

Здесь учтено, что $\cos\left(2m+1-2k\right)\pi/2 = 0$

2.4. Формула Валлиса

Интегрируем неравенство $\cos^{2m+1} x \le \cos^{2m} x \le \cos^{2m-1} x$

по отрезку $x \in \left[0, \pi/2\right]$, получим

$$I_{2m+1} \le I_{2m} \le I_{2m-1}. \tag{2.6}$$

Подставим интеграл I_n в трех случаях $n = 2m-1,\ 2m,\ 2m+1$

$$\frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k+m} C_{2m+1}^k}{2m+1-2k} \le \frac{\pi}{2^{2m+1}}C_{2m}^m \le$$

$$\le -\frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{k+m+1} C_{2m-1}^k}{2m-1-2k},$$

или

$$\begin{gathered} \frac{1}{C_{2m}^m}\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m+k} C_{2m+1}^k}{2m+1-2k} \le \frac{\pi}{2} \le \\ \le -\frac{4}{C_{2m}^m}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k+1} C_{2m-1}^k}{2m-1-2k}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Например,

$$m = 1:\ \frac{4}{3} \le \frac{\pi}{2} \le 2 \Rightarrow 2{,}667 \le \pi \le 4,$$

$m=2:\ \dfrac{64}{45}\le\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{16}{9}\Rightarrow 2{,}844\le\pi\le 3{,}556,$

$m=3:$

$\dfrac{48^2}{1575}\le\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{48^2}{1350}\Rightarrow 2{,}926\le\pi\le 3{,}413$ и т.д.

Последовательность интегралов $\{I_{2m+1}\}$ монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда следует

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{C_{2m}^{m}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m+k}C_{2m+1}^{k}}{2m+1-2k}. \qquad (2.8)$$

Обратимся к формуле Валлиса [4]

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m+1}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2, \qquad (2.9)$$

которую легко получить из неравенств (2.6). Для этого следует использовать рекуррентное соотношение $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\le\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}\le\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!},$$

$$\frac{1}{(2m+1)}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\le\frac{\pi}{2}\le\frac{1}{2m}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2. \qquad (2.10)$$

Знак $m!!$ означает произведение первых m натуральных чисел с учетом четности, например, $(2m)!!=2m\cdot(2m-2)\cdot\ldots\cdot 2$.

Например, первые значения $m=1,2,3$ совпадают со значениями, рассчитанными пр формуле (2.7). Делаем вывод

$$\frac{1}{C_{2m}^{m}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m+k}C_{2m+1}^{k}}{2m+1-2k}=\frac{1}{2m+1}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2,$$

где $\dfrac{C_{2m}^{m}}{2^{2m}}=\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}.$

2.5. Тождество $(\cos^2 x+\sin^2 x)^m=1$.

Подход позволяет записать часто используемое тождество $(\cos^2 x+\sin^2 x)^m=1$ в виде

$$\cos^{2m}x+\sin^{2m}x=$$
$$=2\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}+\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^{k}\left(1+(-1)^{k+m}\right)\cos 2(m-k)x.$$

В частности, при $m=1$ имеем тождество $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, при $m=2,3$

$$\cos^4 x+\sin^4 x=$$
$$=\frac{1}{2^3}\frac{(4)!}{(2!)^2}+\frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{1}C_4^k\left(1+(-1)^{k+2}\right)\cos\left(2(2-k)x\right)=$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x=1-2\sin^2 x\cos^2 x,$$

$$\cos^6 x+\sin^6 x=$$
$$=\frac{1}{2^5}\frac{(6)!}{(3!)^2}+\frac{1}{2^5}\sum_{k=0}^{2}C_6^k\left(1+(-1)^{k+3}\right)\cos\left(2(3-k)x\right)=$$
$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x=1-3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Выводы.

Формулы понижения натуральной степени функций $\cos^n x$ и $\sin^n x$ выражаются компактно через линейные комбинации функций вида $\cos kx$ и $\sin kx$, $k=0.1,...,n$, и позволяют эффективно решать ряд математических задач:
- получать известные и новые формулы тригонометрии;
- интегрировать некоторые рациональные дроби более эффективным путем, чем это принято в стандартном курсе математического анализа;
- новое представление формулы Валлиса вычисления трансцендентного числа π.

Предложены формулы прямого и обратного перехода от набора $2n$ функций $\cos^k x$, $\sin^k x$ к набору $\cos kx, \sin kx$, и наоборот.

Литература

1. Венцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа, том 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М.: Изд-во ФМЛ, 1956. – 472 с.
3. Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей / М. Кац. – М.: ФМЛ, 1962. – 153 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Том I / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука,1970. – 571 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики, том 1 / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. –479 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, «ФМЛ», 1972. – 795 с.
7. Mironenko L.P. Integration of a rational fraction of a special kind. / L.P. Mironenko // Искусственный интеллект. – Вып. 4. – 2013. – С. 253-258.

Міроненко Л.П., Пустова Ю.В. Формули пониження степені тригонометричних функцій в інтегральному численні. *Метою статті є просування формул пониження натуральної степені функцій* $\cos^n x$ *і* $\sin^n x$ *в різні розділи математики, зокрема, в інтегральне числення. Отримано формули, які дозволяють більш ефективно обчислювати інтеграли від раціональних дробів спеціального виду. Запропоновано нове уявлення формули Валліса обчислення числа* π. *Формули пониження дають ряд нових формул тригонометрії або, принаймні, загальну методику отримання великого числа формул тригонометрії.*

Mironenko L.P., Pustovaya Yu.V. Formula lowering natural degree of trigonometric functions in integral calculus. *The purpose of the article is to advance the natural degree decreased formulas of the functions* $\cos^n x$ *and* $\sin^n x$ *to different branches of mathematics, especially, to integration calculus. The formulas allow more effective integrate the special form of rational fractions. It is obtained a new representation of Vallice's formula for the number* π. *The decreased formulas give many new trigonometric identities, at least, the general methodic for construction a great number of new trigonometric equalities.*

Статья поступила в редакцию 21.05.2016
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук А.С. Миненко