УДК 512.558

О конгруэнциях на мультипликативно идемпотентных полукольцах

Е.М. Вечтомов, А.А. Петров
Вятский государственный университет
vecht@mail.ru

Вечтомов Е.М., Петров А.А. О конгруэнциях на мультипликативно идемпотентных полукольцах. *Рассматриваются результаты о конгруэнциях на полукольцах с идемпотентным умножением, в том числе – о максимальных конгруэнциях. Основное внимание уделяется коммутативным мультипликативно идемпотентным полукольцам, в частности, полукольцам, мультипликативная полугруппа которых является цепью.*

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения + и умножения ·, такая, что: $\langle S, +\rangle$ – коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ – полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Полукольцо называется *коммутативным*, если на нем тождественно $xy=yx$.

Полукольцо с тождеством $xx=x$ (с тождеством $x+x=x$) называется *мультипликативно идемпотентным* (соответственно, *аддитивно идемпотентным*). Полукольцо, одновременно мультипликативно идемпотентное и аддитивно идемпотентное, называется *идемпотентным*. Теория мультипликативно идемпотентных полуколец развита в работах [1, 2].

Полукольцо с тождеством $x+y=xy$ называется *моно-полукольцом*. Будем говорить, что полукольцо S обладает *константным сложением*, если оно удовлетворяет тождеству $x+y=u+v$.

Элемент θ произвольного полукольца S назовем *поглощающим по умножению* (*поглощающим по сложению*), если для всех $x\in S$ выполняется $\theta\cdot x=x\cdot\theta=\theta$ (соответственно, $x+\theta=\theta$). Элемент $\infty\in S$, поглощающий по сложению и по умножению, называется *поглощающим*.

Если в полукольце S существует элемент 0, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то S называется *полукольцом с нулем* 0. Наконец, если полукольцо S обладает элементом 1, нейтральным по умножению, то S называется *полукольцом с единицей* 1.

Отметим, что к любому полукольцу S можно естественным образом присоединить нулевой элемент 0 или поглощающий элемент ∞. Обозначим полученные полукольца $S\cup\{0\}$ и $S\cup\{\infty\}$, соответственно.

Мультипликативная полугруппа любого коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S является нижней полурешеткой, ее можно упорядочить следующим образом:

$$x \prec y \Leftrightarrow xy = x .$$

Аналогично, любое аддитивно идемпотентное полукольцо является верхней полурешеткой по сложению, в ней вводится отношение порядка $\le$:

$$x \le y \Leftrightarrow x + y = y .$$

Конгруэнцией на полукольце S называется отношение эквивалентности ρ на S, стабильное относительно операций:

$a\rho b$ и $c\rho d$ влекут $(a+c)\rho(b+d)$ и $(ac)\rho(bd)$ для любых $a, b, c, d \in S$.

Множество $\mathrm{Con}\, S$ всех конгруэнций на полукольце S является ограниченной решеткой относительно включения конгруэнций:

$\rho\subseteq\tau$ означает, что $a\rho b \Rightarrow a\tau b$ для любых $a, b \in S$.

Наименьшим элементом в $\mathrm{Con}\, S$ служит *нулевая* конгруэнция $\mathbf{0}_S$ – отношение равенства, наибольшим – *единичная* конгруэнция $\mathbf{1}_S$ – одноклассовая. Полукольцо S называется *подпрямо неразложимым*, если на нем существует наименьшая ненулевая конгруэнция; *конгруэнц-простым*, если оно обладает ровно двумя конгруэнциями: отношением равенства и одноклассовой.

На произвольном полукольце S для любого фиксированного натурального числа $n\ge 2$ определим конгруэнцию $\approx_{(n)}$:

$$x \approx_{(n)} y \Leftrightarrow nx = ny.$$

В произвольном полукольце S вводится «разностное» отношение $\le$:

$$x \le y \Leftrightarrow x = y \text{ или } (\exists z \in S)(x + z = y) .$$

Оно рефлексивно и транзитивно, но не обязательно антисимметрично. Если отношение $\le$ антисимметрично, то есть является отношением порядка, то такое полукольцо назовем *упорядочиваемым*.

Бинарное отношение $\approx$:

$$x \approx y \Leftrightarrow x \le y,\ y \le x$$

является конгруэнцией на произвольном полукольце.

Лемма 1. *Для произвольного мультипликативно идемпотентного полукольца S справедливы следующие утверждения:*

1. *факторполукольцо* $S/\approx_{(2)}$ *является идемпотентным полукольцом*;
2. *факторполукольцо* $S/\approx_{(3)}$ *удовлетворяет тождеству* $3x = x$;
3. *факторполукольцо* $S/\approx$ *удовлетворяет тождеству* $3x = 2x$ *и является упорядочиваемым полукольцом*;
4. *пересечение конгруэнций* $\approx_{(3)}$ *и* $\approx$ *есть отношение равенства на S*.

Следствие 1. *Любое мультипликативно идемпотентное полукольцо является подпрямым произведением полуколец, одно из которых удовлетворяет тождеству* $3x = x$, *а другое удовлетворяет тождеству* $3x = 2x$.

С точностью до изоморфизма существует ровно четыре двухэлементных коммутативных мультипликативно идемпотентных полукольца:

- двухэлементная цепь **B**=$\{0,1\}$;
- двухэлементное поле $\mathbf{Z}_2$=$\{0,1\}$;
- двухэлементное идемпотентное моно-полукольцо **D**=$\{1,\infty\}$ с единицей 1;
- двухэлементное полукольцо **T**=$\{1,\infty\}$ с единицей 1 и константным сложением.

Предложение 1. *Полукольца* **B**, $\mathbf{Z}_2$, **D**, **T** *– это в точности все конгруэнц-простые коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца.*

Замечание 1. В работе [3] указан пример трехэлементного конгруэнц-простого полукольца *T* с некоммутативным идемпотентным умножением. Приведем таблицы Кэли его редуктов:

+	*a*	1	*b*
a	*a*	1	*b*
1	1	1	*b*
b	*b*	*b*	*b*

·	*a*	1	*b*
a	*a*	*a*	*b*
1	*a*	1	*b*
b	*a*	*b*	*b*

Построенное полукольцо с единицей 1 обладает следующими свойствами: по сложению имеем трехэлементную цепь $a<1<b$, мультипликативная же полугруппа является полугруппой правых нулей, то есть *T* удовлетворяет тождеству $xy=y$.

Предложение 2. *Для любого полукольца S справедливы следующие утверждения:*

1. *S мультипликативно идемпотентно тогда и только тогда, когда классы любой конгруэнции* ρ *на S являются* (*выпуклыми*) *подполугруппами полугруппы* $\langle S, \cdot\rangle$;
2. *S идемпотентно тогда и только тогда, когда классы любой конгруэнции* ρ *на S являются подполукольцами в S*.

Теорема 1. *Для всякого подпрямо неразложимого коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S справедливы следующие утверждения:*

1. *S имеет единицу* 1;
2. *множество* $S\backslash\{1\}$ *– наибольший идеал в S, обладающий единицей e*;
3. *наименьшей ненулевой конгруэнцией на S служит конгруэнция, склеивающая только элементы* 1 *и e*.

Пример 1. Если подпрямо неразложимое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо *S* обладает нулем 0, то полукольцо $S\cup\{\infty\}$ также будет подпрямо неразложимым. В самом деле, для любых a, $b \in S$ и конгруэнции ρ на $S\cup\{\infty\}$ из $a\rho\infty$ следует $0\rho\infty$, так как $(a\cdot 0)\rho(\infty\cdot 0)$.

Тогда $b\rho\infty$, поскольку $(b+0)\rho(b+\infty)$. Таким образом, $\rho = \mathbf{1}_{S\cup\{\infty\}}$, откуда для любой нетривиальной конгруэнции ρ' на $S\cup\{\infty\}$ класс $[\infty]_{\rho'}$ одноэлементен. Значит, полукольцо $S\cup\{\infty\}$ подпрямо неразложимо вместе с *S*.

Аналогично проверяется, что для всякого подпрямо неразложимого коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца *S* с поглощающим элементом ∞ полукольцо $S\cup\{0\}$ является подпрямо неразложимым.

Коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо назовем *цепным*, если полурешетка $\langle S, \cdot\rangle$ является цепью.

Пример 2. Обозначим S_0= **B**, $\mathbf{Z}_2$ – одно из двухэлементных коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с нулевым элементом, а T_0= **D**, **T** – одно из двухэлементных полуколец с поглощающим элементом. Тогда из примера 1 полукольца $S_1 = S_0\cup\{\infty\}$ и $T_1 = T_0\cup\{\infty\}$ подпрямо неразложимы. Снова имеем подпрямо неразложимые полукольца $S_2 = S_1\cup\{0\}$ и $T_2 = T_1\cup\{\infty\}$.

Продолжая процесс далее, для любого натурального *n* получим четыре подпрямо неразложимых полукольца: $S_n = S_{n-1}\cup\{\infty\}$ и $T_n = T_{n-1}\cup\{0\}$, если *n* нечетно, и $S_n = S_{n-1}\cup\{0\}$ и $T_n = T_{n-1}\cup\{\infty\}$ при четном *n*.

Теорема 2. *Для любого кардинала* $m\geq 2$ *существуют цепные подпрямо неразложимые полукольца мощности m как с* 0, *так и с* ∞.

В самом деле, полученные цепные полукольца из примера 2 образуют цепочки вложенных полуколец

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots,$$
$$T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_n \subset \ldots.$$

Их объединения $\bigcup_{k=0}^{\infty} S_k$ и $\bigcup_{k=0}^{\infty} T_k$ также будут цепными подпрямо неразложимыми полукольцами. Присоединяя к ним 0 или ∞, снова получаем цепные подпрямо неразложимые полукольца.

Для любого ординала α по трансфинитной индукции построим цепные подпрямо неразложимые полукольца S_α и T_α.

В случае непредельного ординала α положим

$$S_\alpha = S_{\alpha-1} \cup \{\theta\},$$

где θ=∞, если $S_{\alpha-1}$ – полукольцо с нулем 0, и θ=0, если $S_{\alpha-1}$ содержит ∞.

Если α – предельный ординал, то положим

$$S_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta \right) \cup \{\theta\},$$

где θ=0 или θ=∞.

Аналогично строятся полукольца T_α.

Заметим, что для каждого бесконечного ординала α мы построили цепные подпрямо неразложимые полукольца, имеющие мощность $|\alpha|$.

В теореме 2 для каждого кардинала m≥2 получаются два подпрямо неразложимых идемпотентных цепных полукольца, что дает результат А. Романовской [4, corollary 2.9].

Предложение 3. *Конечные цепные подпрямо неразложимые полукольца – с точностью до изоморфизма – это полукольца S_n и T_n из примера* 2. *Значит, для любого натурального числа m≥2 существует ровно* 4 *m-элементных цепных подпрямо неразложимых полукольца.*

Замечание 2. Если подпрямо неразложимое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S имеет поглощающий элемент ∞', то, присоединяя к нему поглощающий элемент ∞, по пункту 3 теоремы 1 получаем, что полукольцо $S \cup \{\infty\}$ подпрямо разложимо, так как задает конгруэнцию следующее разбиение $\tau_{\{\infty',\infty\}}$: одним ее классом будет $\{\infty', \infty\}$, остальные классы одноэлементны. При этом $S \cup \{\infty\} / \tau_{\{\infty',\infty\}} \cong S$.

Аналогично, для подпрямо неразложимого коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S с нулем 0', полукольцо $S \cup \{0\}$ с присоединенным нулем 0 будет по теореме 1 подпрямо разложимым (разбиение $\tau_{\{0',0\}}$ задает конгруэнцию, причем $S \cup \{0\} / \tau_{\{0',0\}} \cong S$).

Из предложения 1 вытекает

Предложение 4. *Для произвольной конгруэнции ρ на коммутативном мультипликативно идемпотентном полукольце S справедливы следующие утверждения:*

1. *ρ максимальная тогда и только тогда, когда она двухклассовая, то есть факторполукольцо S/ρ двухэлементно*;

2. *если $\rho \neq \mathbf{1}_S$, то ρ содержится в некоторой максимальной конгруэнции на S*.

Замечание 3. Максимальные конгруэнции на некоммутативном мультипликативно идемпотентном полукольце могут иметь более двух классов. В самом деле, рассмотрим трехэлементное некоммутативное идемпотентное конгруэнц-простое полукольцо T из замечания 1.

Обозначим $T_1=\{a,1,b,c\}$ – четырехэлементное идемпотентное полукольцо с тождеством $xy = y$, такое, что $a \le 1 \le b \le c$. Единственную нетривиальную конгруэнцию μ на T_1 задает трехклассовое разбиение $\{a\},\{1\},\{b,c\}$. Конгруэнция μ максимальна и $T_1 / \mu \cong T$.

Пример 3. Рассмотрим конгруэнции на конечных цепных подпрямо неразложимых полукольцах S из примера 2. Возьмем произвольную ненулевую конгруэнцию ρ на S. Тогда $1\rho\, e$ по теореме 1. Пусть для различных элементов a, $b \in S \setminus \{1,e\}$, $a \prec b$ и $a\rho b$. Тогда $[a;b]_\prec \subseteq [a]_\rho$ по предложению 2. Найдутся $0', \infty' \in [a;b]_\prec$, такие, что 0' будет нулевым элементом полукольца $[0';1]_\prec$, а ∞' – поглощающий элемент в полукольце $[\infty';1]_\prec$. Поэтому имеем $0'\rho\infty'$, $(1+0')\rho(1+\infty')$, $(1+0')\rho(1+\infty')$, $1\rho\infty'$. По предложению 2 получаем $[a;1]_\prec \subseteq [a]_\rho$. Таким образом, все конгруэнции на S имеют следующий вид: одним классом служит отрезок $[c;1]_\prec$, где $c \in S$, остальные классы одноэлементны. Значит, $\mathrm{Con}\, S \cong \langle S, \prec \rangle$ – $|S|$-элементная цепь. Произвольная максимальная конгруэнция μ в этом случае имеет вид: одним ее классом будет промежуток $(m;1]_\prec$, другим – m, где m – наименьший элемент цепи $\langle S, \prec \rangle$. Отметим, что двухэлементное факторполукольцо S/μ при этом идемпотентно, то есть изоморфно **B** или **D**.

Даже цепные подпрямо неразложимые полукольца не обязаны обладать максимальными конгруэнциями.

Замечание 4. Рассмотрим бесконечные цепные полукольца S_α, описанные в теореме 2. Конгруэнции на таких полукольцах устроены так же, как в примере 3: одним классом будет отрезок $[a;1]_\prec$, где $a \in S$, остальные классы одноэлементны. Ясно, что полукольцо S_α не имеет максимальных конгруэнций тогда и только тогда α – предельный ординал. Кроме того Con $S_\alpha \cong \langle S_\alpha, \succ \rangle$.

Замечание 5. Отметим, что решетка конгруэнций любой дистрибутивной решетки является дистрибутивной. Однако решетка конгруэнций Con S произвольного мультипликативно идемпотентного полукольца S не обязана быть модулярной. Например, рассмотрим булеан $B\{a, b\} = \{\phi, a, b, \{a, b\}\}$ как идемпотентное моно-полукольцо с одной операцией $\cup$. Легко проверить, что решетка Con $\langle B\{a, b\}, \cup, \cup \rangle$ содержит 7 элементов и не модулярна.

Идеалом полукольца S называется всякое его непустое подмножество *I*, такое, что для любых $a, b \in I, s \in S$ выполняется: $a+b, as, sa \in I$.

Для идеалов *I*, *J* обозначим идеал:

$$I + J = \{a+b : a \in I, b \in J\}.$$

Множество Id S всех идеалов полукольца S относительно теоретико-множественного включения есть решетка с операциями

$$I \vee J = \sup(I, J) = I \cup J \cup (I+J), \inf(I, J) = I \cap J.$$

Предложение 5. *Для любого мультипликативно идемпотентного полукольца S решетка* Id *S всех его идеалов дистрибутивна.*

Действительно, пусть $A, B, C \in$ Id S. Положим $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$ и $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. В решетке Id S имеем $A \cap B = AB$ и $A \vee B = A+B$. Поэтому дистрибутивный закон принимает вид:

$$((A+B) \cup A \cup B)C = (AC+BC) \cup AC \cup BC.$$

Очевидно, что $AC \cup BC = (A \cup B)C$ и $(A+B)C = AC+BC.$

Обратно, возьмем $x \in AC+BC.$ Тогда $x = ac+bd$ для подходящих элементов $a \in A, b \in B, c, d \in C$, откуда $ac \in A, bd \in B, x = ac+bd \in C$. Поэтому

$$x = x^2 = (ac+bd)x \in (A+B)C.$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, № 1.1375.2014/ К.

Литература

1. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Мультипликативно идемпотентные полукольца // Фунд. и прикл. матем. 2013. Т. 18. № 4. С. 41–70.
2. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Полукольца с идемпотентным умножением. Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. 144 с.
3. Monico C. On finite congruence-simple semirings // Journal of Algebra. 2004. V. 271. P. 846–854.
4. Romanowska A. On bisemilattices with one distributive law // Algebra Universalis. 1980. V. 10. P. 36–47.

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров. О конгруэнциях на мультипликативно идемпотентных полукольцах. *Рассматриваются результаты о конгруэнциях на полукольцах с идемпотентным умножением, в том числе – о максимальных конгруэнциях. Основное внимание уделяется коммутативным мультипликативно идемпотентным полукольцам, в частности, полукольцам, мультипликативная полугруппа которых является цепью. Доказано, что решетка идеалов произвольного мультипликативно идемпотентного полукольца является дистрибутивной.*

Ключевые слова: *Полукольцо, идемпотентность, коммутативность, конгруэнция, максимальная конгруэнция, решетка конгруэнций*

E. M. Vechtomov, A. A. Petrov. About congruences on multiplicatively idempotent semirings. *In this paper, we consider the results about congruences on semirings with idempotent multiplication, including maximal congruences. Special attention is devoted to commutative multiplicatively idempotent semirings, in particular, the ones in which a multiplicative semigroup is a chain. It is proved that the lattice of ideals of any multiplicatively idempotent semiring is distributive.*

Keywords: *Semiring, idempotency, commutativity, congruence, maximal congruence, lattice of congruences*

Статья поступила в редакцию 21.05.2016
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук А.С. Миненко