

Компьютерный расчет задачи взаимодействия двух жидких гравитирующих тел: спутники Юпитера

Андрюхин А.И.¹, Судаков С.Н.²

¹Донецкий национальный технический университет,

²Институт прикладной математики и механики
alexandruckin@rambler.ru, sudakov@iamm.su

Андрюхин А.И., Судаков С.Н. Компьютерный расчет задачи взаимодействия двух жидких гравитирующих тел: спутники Юпитера. Получены уравнения движения для задачи двух тел, одно из которых – жидкий эллипсоид переменной вязкости, совершающий однородное вихревое движение, а другое – сферически симметричное твердое тело. Для решения уравнений использован численный метод Рунге-Кутты. В качестве примеров приведены расчеты движения систем с массово-геометрическими параметрами, системы Юпитер-Ио, Юпитер-Ганимед, Юпитер-Европа и Юпитер-Каллисто.

Ключевые слова: жидкий эллипсоид, задача двух тел, Ио, Ганимед, Европа, Каллисто, Юпитер

Введение

Динамике эллипсоидальных масс идеальной несжимаемой жидкости посвящена обширная литература [1–10]. В работе рассмотрена задача о движении двух тел, одно из которых представляет собой жидкий эллипсоид, а второе – сферически симметричное твердое тело (ССТТ). Частицы жидкости притягиваются друг к другу и к ССТТ по закону Ньютона. Жидкость считается несжимаемой и обладающей переменной вязкостью, допускающей ее однородное вихревое движение [6, 7].

Системы координат

Обозначим через $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижную систему координат, начало которой совпадает с общим центром масс рассматриваемой механической системы. Через $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ обозначим подвижные прямоугольные оси, начало которых O_1 совпадает с центром масс жидкого эллипсоида, а оси параллельны соответствующим осям системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Через $O_1x_1x_2x_3$ обозначим систему координат, оси которой являются главными осями жидкого эллипсоида. Соответствующие системы координат представлены на рисунке 1.

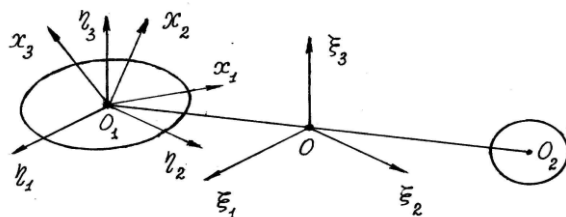


Рисунок 1. – Используемые системы координат

Координаты, скорости и ускорения центра масс жидкости

Положение точки O_1 определим сферическими координатами r_1, φ_1, θ_1 , где θ_1 – угол между плоскостью $O\xi_1\xi_2$ и радиусом-вектором OO_1 ; φ_1 – угол между $O\xi_1$ и проекцией вектора OO_1 на плоскость $O\xi_1\xi_2$.

Тогда координаты точки O_1 в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ выразятся формулами:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \xi_2 &= r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\ \xi_3 &= r_1 \sin \theta_1.\end{aligned}\quad (1)$$

Дифференцируя формулы (1) по времени t , находим проекции скорости центра масс жидкости (точки O_1) на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$:

$$\begin{aligned}u_1 &= \dot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_2 &= \dot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + \dot{\varphi}_1 r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_3 &= \dot{r}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1.\end{aligned}\quad (2)$$

Дифференцируя равенства (2) по t , находим проекции ускорения точки O_1 на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$:

$$\begin{aligned}w_1 &= \ddot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ &\quad r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + \\ &\quad + 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ &\quad - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_2 &= \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + r_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ &\quad - r_1 \ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ &\quad - 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\ &\quad - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_3 &= \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + \\ &\quad + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1.\end{aligned}\quad (3)$$

Положение осей $O_1x_1x_2x_3$ относительно $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ определим углами Эйлера φ, ψ, θ . Матрица перехода $A = (a_{ij})$ от осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ к осям $O_1x_1x_2x_3$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi \\ a_{12} &= -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi \\ a_{13} &= \sin\psi \sin\theta \\ a_{21} &= \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi \\ a_{22} &= -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi \\ a_{23} &= -\cos\psi \sin\theta \\ a_{31} &= \sin\theta \sin\varphi \\ a_{32} &= \sin\theta \cos\varphi \\ a_{33} &= \cos\theta \end{aligned}$$

Используя матрицу перехода A , находим проекции ускорения точки O_1 на оси $O_1x_1x_2x_3$:

$$w_{x_i} = \sum_{j=1}^3 \dot{a}_{ij} w_{\eta_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Координаты центра масс сферически симметричного твердого тела

Центр масс ССТТ обозначим O_2 . Предполагая, что внешние силы на систему не действуют и центр масс системы неподвижен, получаем соотношение:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad (5)$$

где m_1 – масса жидкого эллипсоида, m_2 – масса ССТТ,

$r_i = |OO_i|$, $i = 1, 2, 3$. При движении точки O , O_1 , O_2 будут лежать на одной прямой. Используя (5), находим координаты точки O_2 в осях $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$:

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= -m^{-1} r_1 \cos\varphi_1 \cos\theta_1, \\ \eta_{22} &= -m^{-1} r_1 \sin\varphi_1 \cos\theta_1, \\ \eta_{23} &= -m^{-1} r_1 \sin\theta_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $m = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. Тогда в осях $O_1x_1x_2x_3$ точка

O_2 будет иметь координаты:

$$x_{2i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \eta_{2j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Гравитационные силы, действующие на жидкость со стороны сферически симметричного твердого тела

Проекции на оси $O_1x_1x_2x_3$ силы, действующей на единичный объем жидкости со стороны ССТТ, определяются формулами:

$$f_i = G\rho m_2 \frac{\tilde{x}_{2i} - \tilde{x}_i}{r^2 [S]^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

где $S = (\tilde{x}_{21} - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_{22} - \tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_{23} - \tilde{x}_3)^2$, G – гравитационная постоянная, ρ – плотность жидкости, $r^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2$, $\tilde{x}_{2i} = x_{2i}/r$, $\tilde{x}_i = x_i/r$, x_1, x_2, x_3 – координаты в осях $O_1x_1x_2x_3$ рассматриваемой частицы жидкости.

Линеаризация

В дальнейшем будем рассматривать только те случаи, когда расстояние r между точками O_1 и O_2 настолько велико, что можно провести линеаризацию величин f_i по $\tilde{x}_i$, $i = 1, 2, 3$. Такая линеаризация необходима для существования однородного вихревого движения жидкости и сохранения ее эллипсоидальной формы. После линеаризации будем иметь:

$$f_1 = \frac{G\rho m_2}{r^2} \left(\frac{x_{21}}{r} + \left(\frac{3x_{21}^2}{r^2} - 1 \right) \frac{x_1}{r} + \left(\frac{3x_{21}x_{22}x_2}{r^3} + \frac{3x_{21}x_{23}x_3}{r^3} \right) \right) \quad (123),$$

где символ циклической перестановки индексов (123) не применяется к величине m_2 и к первому индексу величин x_{21}, x_{22}, x_{23} .

Уравнения гидродинамики

Движение жидкости переменной вязкости описывается уравнениями [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \Delta \mathbf{v} - \mathbf{w} - \dot{\omega} \times \mathbf{x} - \\ &- \omega \times (\omega \times \mathbf{x}) - 2\omega \times \mathbf{v} - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость движения жидкости относительно осей $O_1x_1x_2x_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – координатный вектор, ρ – плотность жидкости, p – давление, ω – угловая скорость осей $O_1x_1x_2x_3$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – полудлины главных осей жидкого эллипсоида, $\mathbf{w} = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$ – абсолютное ускорение точки O_1 , $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$.

Кинематическая вязкость $\nu(x, c)$ определяется выражением

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} \right),$$

где $\nu_0 = \text{const}$.

Граница жидкости в осях $O_1x_1x_2x_3$ задается уравнением:

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1.$$

Следовательно, на границе жидкости $\nu = 0$. Компоненты тензора скоростей деформаций жидкости σ имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial v_j} + \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Потенциал Φ гравитационных сил, порождаемых жидкостью, в ее внутренних точках описывается формулой [2]:

$$\Phi = \pi G (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0),$$

где $\alpha_i = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_i^2 + \lambda)D}$, $i = 1, 2, 3$.

$$\chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}, \quad D = [(c_1^2 + \lambda)(c_2^2 + \lambda)(c_3^2 + \lambda)]^{1/2}.$$

Уравнения движения

В случае однородного вихревого движения компоненты скорости жидкости v_1, v_2, v_3 и давление p ищем в виде:

$$v_1 = \frac{\dot{c}_1}{c_1} x_1 - \frac{c_1}{c_2} \omega_3^* x_2 + \frac{c_1}{c_3} \omega_2^* x_3 \quad (123),$$

$$p = -p_0(t) \left(\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} - 1 \right), \quad (9)$$

где $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ и $p_0(t)$ – неизвестные функции времени t .

Подставляя (9) в уравнения движения жидкости (8), получаем:

$$k_{i0} + k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где $k_{i0} = w_{x_i} - Gm_2 \frac{x_{2i}}{r^3}$, $i = 1, 2, 3$,

$$k_{11} = \frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \omega_3^{*2} - \omega_2^{*2} - \frac{2p_0}{\rho c_1^2} + 4v_0 \frac{\dot{c}_1}{c_1^3} - \omega_2^2 - \omega_3^2 -$$

$$-2 \frac{c_3}{c_1} \omega_2^* \omega_2 - 2 \frac{c_2}{c_1} \omega_3^* \omega_3 + 2\pi G \alpha_1 -$$

$$- \frac{Gm_2}{r^5} (3x_{21}^2 - r^2) \quad (123),$$

$$k_{12} = -\frac{c_1}{c_2} \dot{\omega}_3^* - \frac{2\dot{c}_1}{c_2} \omega_3^* + \frac{c_1}{c_2} \omega_1^* \omega_2^* +$$

$$+ \frac{2v_0}{c_2^2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2 c_1} \omega_3^* - \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 + 2 \frac{c_3}{c_2} \omega_1^* \omega_2 -$$

$$- 2 \frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{22}}{r^5} \quad (123),$$

$$k_{12} = \frac{c_1}{c_3} \dot{\omega}_2^* + \frac{2\dot{c}_1}{c_3} \omega_2^* + \frac{c_1}{c_3} \omega_1^* \omega_3^* +$$

$$+ \frac{2v_0}{c_3^2} \frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1 c_3} \omega_2^* + \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 + \frac{2c_3}{c_3} \omega_2 +$$

$$+ \frac{2c_2}{c_3} \omega_1^* \omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{23}}{r^5} \quad (123).$$

Равенства (10) должны выполняться при любых значениях координат x_1, x_2, x_3 из области, занимаемой жидкостью. Отсюда следуют уравнения:

$$k_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

где k_{ij} определены выражениями (11). Из условия несжимаемости следует, что

$$c_1 c_2 c_3 = R^3 = const. \quad (13)$$

Движение осей $O_1 x_1 x_2 x_3$ относительно $O_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3$ описывается кинематическими уравнениями Эйлера, которые запишем в виде:

$$\dot{\varphi} = \omega_3 - (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\dot{\psi} = (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) / \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi, \quad (14)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции угловой скорости осей $O_1 x_1 x_2 x_3$ на себя.

Соотношения (12) – (14) представляют собой систему шестнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений относительно шестнадцати неизвестных $\omega_i^*, \omega_i, c_i$, $i = 1, 2, 3$, $p_0, \varphi, \psi, \theta, r_1, \varphi_1, \theta_1$ и после задания начальных условий, полностью описывают движение системы.

Уравнения движения в нормальной форме.

$$\text{Уравнения } k_{23} = 0, \quad k_{32} = 0 \quad (123)$$

представим в виде

$$\frac{c_2}{c_3} \dot{\omega}_1^* + \dot{\omega}_1 = f_{23}, \quad (15)$$

$$\frac{c_3}{c_2} \dot{\omega}_1^* + \dot{\omega}_1 = f_{32} \quad (123),$$

где

$$f_{23} = -\frac{2\dot{c}_2}{c_3} \omega_1^* + \frac{c_2}{c_3} \omega_2^* \omega_3^* + \omega_2 \omega_3 + 2 \frac{c_1}{c_3} \omega_2^* \omega_3$$

$$- 2 \frac{\dot{c}_3}{c_3} \omega_1 +$$

$$+ \frac{2v_0}{c_3^2} \left(\frac{c_3}{c_2} - \frac{c_2}{c_3} \right) \omega_1^* - 3Gm_2 \frac{x_{22}x_{23}}{r^5} \quad (123),$$

$$f_{32} = -\frac{2\dot{c}_3}{c_2} \omega_1^* - \frac{c_3}{c_2} \omega_2^* \omega_3^* - \omega_2 \omega_3 - 2 \frac{c_1}{c_2} \omega_3^* \omega_2$$

$$- 2 \frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_1 -$$

$$(16)$$

$$-\frac{2\nu_0}{c_2^2}\left(\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_2}{c_3}\right)\omega_l^*+3Gm_2\frac{x_{22}x_{23}}{r^5} \quad (123).$$

Разрешая систему (15) относительно ω_i^* , ω_i , $i=1,2,3$, получаем уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1^* &= \frac{c_2c_3}{c_2^2-c_3^2}(f_{23}-f_{32}), \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{c_2^2f_{32}-c_3^2f_{23}}{c_2^2-c_3^2} \quad (123).\end{aligned}$$

Теперь исключим переменные p_0 и $\ddot{c}_3$ из уравнений $k_{ij}=0$, $i=1,2$. Из уравнения $k_{33}=0$ находим

$$\frac{2p_0}{\rho} = \ddot{c}_3c_3 + c_3^2f_{33}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}f_{33} &= -\omega_1^{*2} - \omega_2^{*2} - \omega_1^2 - \omega_2^2 - 2\frac{c_2}{c_3}\omega_1^*\omega_1 - 2\frac{c_1}{c_3}\omega_2^*\omega_2 + \\ &+ 4\nu_0\frac{\dot{c}_3}{c_3^3} + 2\pi\rho G\alpha_3 - \frac{Gm_2}{r^5}(3x_{23}^2 - r^2) \quad (123).\end{aligned}$$

Из условия (13) следуют равенства

$$c_3 = R^3c_1^{-1}c_2^{-1}, \quad \dot{c}_3 = -R^3(c_1^{-2}c_2^{-1}\dot{c}_1 + c_1^{-1}c_2^{-2}\dot{c}_2), \quad (19)$$

$$\ddot{c}_3 = \frac{R^3}{c_1c_2}\left(-\frac{\ddot{c}_1}{c_1}-\frac{\ddot{c}_2}{c_2}+\frac{2\dot{c}_1^2}{c_1^2}+\frac{2\dot{c}_1\dot{c}_2}{c_1c_2}+\frac{2\dot{c}_2^2}{c_2^2}\right). \quad (20)$$

Используя (20), представим выражение (18) в виде

$$\begin{aligned}\frac{2p_0}{\rho} &= \frac{R^6}{c_1^2c_2^2}\left(-\frac{\ddot{c}_1}{c_1}-\frac{\ddot{c}_2}{c_2}+\frac{2\dot{c}_1^2}{c_1^2}+\frac{2\dot{c}_1\dot{c}_2}{c_1c_2}+\frac{2\dot{c}_2^2}{c_2^2}\right) \\ &+ c_3^2f_{33}.\end{aligned} \quad (21)$$

Используя (21), представим уравнения $k_{11}=0$ и $k_{22}=0$ в виде

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{R^6}{c_1^4c_2^2}\right)\frac{\ddot{c}_1}{c_1}+\frac{R^6}{c_1^4c_2^2}\frac{\ddot{c}_2}{c_2} &= F_1, \\ \frac{R^6}{c_1^2}\frac{\ddot{c}_1}{c_1}+\left(1+\frac{R^6}{c_1^2c_2^4}\right)\frac{\ddot{c}_2}{c_2} &= F_2,\end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{2R^6}{c_1^4c_2^2}\left(\frac{\dot{c}_1^2}{c_1^2}+\frac{\dot{c}_1\dot{c}_2}{c_1c_2}+\frac{\dot{c}_2^2}{c_2^2}\right)+\frac{c_3^2}{c_1^2}f_{33}-f_{11}, \\ F_2 &= \frac{2R^6}{c_1^2c_2^4}\left(\frac{\dot{c}_1^2}{c_1^2}+\frac{\dot{c}_1\dot{c}_2}{c_1c_2}+\frac{\dot{c}_2^2}{c_2^2}\right)+\frac{c_3^2}{c_2^2}f_{33}-f_{22},\end{aligned} \quad (23)$$

Разрешая систему (22) относительно $\ddot{c}_1/c_1$ и $\ddot{c}_2/c_2$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{c}_1}{c_1} &= \left[\left(1+\frac{R^6}{c_1^2c_2^4}\right)F_1-\frac{R^6}{c_1^4c_2^2}F_2\right]\Delta^{-1}, \\ \frac{\ddot{c}_2}{c_2} &= \left[\left(1+\frac{R^6}{c_1^4c_2^2}\right)F_2-\frac{R^6}{c_1^2c_2^4}F_1\right]\Delta^{-1},\end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения $k_{0i}=0$, $i=1,2,3$

записываем в виде

$$w_{x_i} = Gm_2\frac{x_{2i}}{r^3}, \quad i=1,2,3, \quad (25)$$

где

w_{x_i} , $i=1,2,3$ – проекции абсолютного ускорения

точки O_l на оси $O_lx_1x_2x_3$, которые определяются формулами

(3), (4). Величины x_{2i} , $i=1,2,3$ определены формулами (7).

Умножая уравнения (25) слева на матрицу A^T , обратную матрице A , приводим их к виду

$$w_i = \frac{Gm_2}{r^3}\sum_{j=1}^3 a_{ij}x_{2j}, \quad i=1,2,3.$$

Учитывая (7), перепишем эти уравнения так

$$w_j = \frac{Gm_2}{r^3}\eta_{2j}, \quad i=1,2,3,$$

где η_{2j} определены формулами (6).

Используя (3) и (6), запишем последние уравнения в виде

$$\ddot{r}_i \cos \varphi_i \cos \theta_i - r_i \ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i \cos \theta_i - r_i \ddot{\theta}_i \cos \varphi_i \sin \theta_i -$$

$$\begin{aligned}
& -r_1(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + \\
& 2r_1\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \\
& -2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 = -\frac{Gm_2}{mr^3} r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \\
& \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + r_1\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\
& r_1\ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\
& -r_1(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2r_1\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \\
& + 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \\
& -2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 = -\frac{Gm_2}{mr^3} r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \\
& \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 r_1 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 = -\frac{Gm_1}{mr^3} r_1 \cos \theta_1,
\end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно $\ddot{r}_1, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\theta}_1$, приводим их к виду

$$\ddot{r}_1 = r_1(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2) - \frac{Gm_2}{mr^3} r_1,$$

$$\ddot{\varphi}_1 r_1 \cos \theta_1 = 2r_1\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1\dot{\varphi}_1 \cos \theta_1, \quad (26)$$

$$\ddot{\theta}_1 r_1 = -2r_1\dot{\varphi}_1^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1.$$

Уравнения (26) представляют собой уравнения движения в задаче двух тел. Второе из этих уравнений может быть проинтегрировано и представлено в виде

$$\dot{\varphi}_1 r_1^2 \cos^2 \theta_1 = \text{const.}$$

Уравнения (14), (17), (24), (26) разрешены относительно старших производных и представляют собой систему четырнадцати обыкновенных

дифференциальных уравнений относительно четырнадцати неизвестных

$$\varphi, \psi, \theta, \quad \omega_i^*, \omega_i, i=1,2,3, \quad c_1, c_2, r_1, \varphi_1, \theta_1$$

и после задания начальных условий, полностью описывает движение рассматриваемой механической системы.

Для численного решения уравнений (14), (17), (24), (26) вводим

безразмерные переменные $\tau = \frac{t}{T}$,

$$\zeta_i = \frac{c_i}{R}, \quad u_i = \frac{d\zeta_i}{d\tau}, \quad \tilde{\omega}_i^* = \omega_i^* T,$$

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i T, \quad i=1,2,3, \quad \tilde{r} = \frac{r_1}{R}, \quad \text{где } T - \text{размерность времени, } R = \sqrt{c_1 c_2 c_3}.$$

Для решения уравнений был использован численный метод Рунге-Кутты 4-5.

Единицей времени являются земные сутки. Единицей длины на графиках является 1 метр.

Результаты расчетов представлены на рис.2-

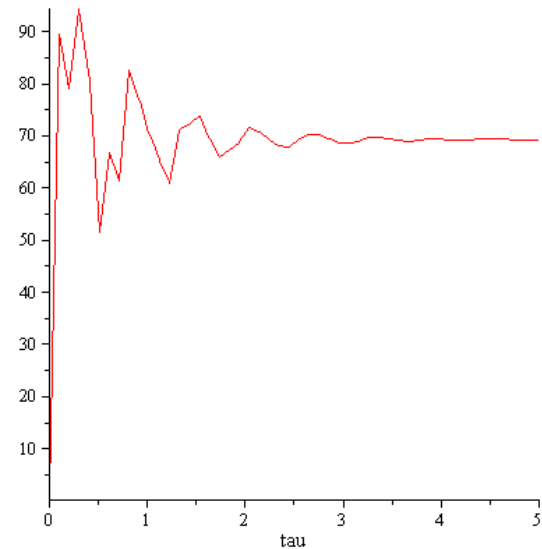


Рисунок 2—Разница между осями для Ио.

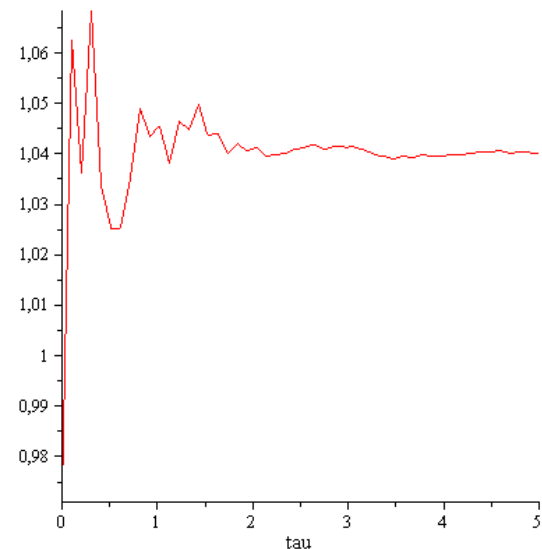


Рисунок 3—Разница между осями для Каллисто.

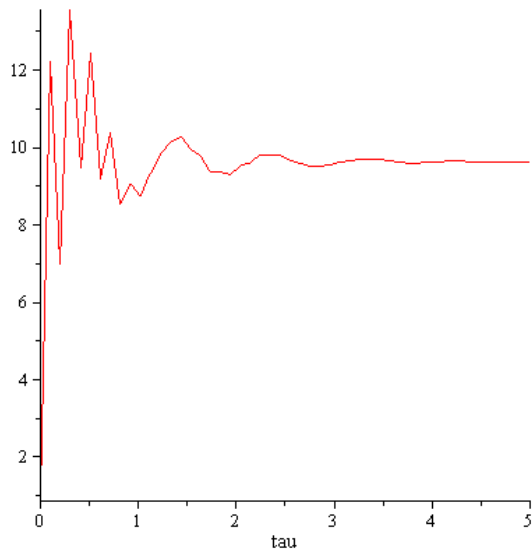


Рисунок 4—Разница между осями для Европы.

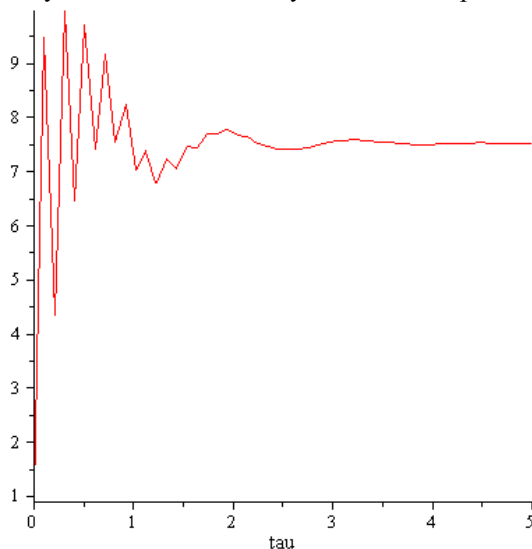


Рисунок 5—Разница между осями для Ганимеда.

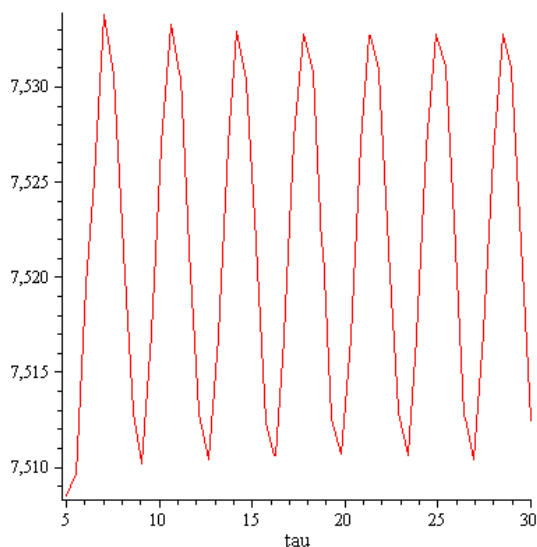


Рисунок 6—Разница между осями для Ганимеда.

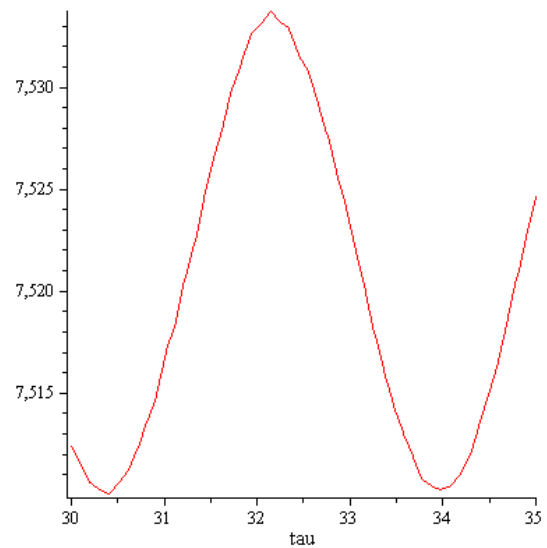


Рисунок 7—Разница между осями для Ганимеда.

Выводы

Решаемая задача является насущной ввиду успешных космических полетов станции Юнона к Юпитеру. На рис. представлены снимки Юпитера и его спутников, которые получены этой станцией.

Расчет моделей достаточно трудоемкий процесс. Построение графика отклонений полюсов за временной промежуток 10 суток занимает примерно 1,5 часа работы процессора I3 модели 4170 с частотой 3,7 ГГц.

Время расчета за более длинный временной период в лучшем случае прямо пропорционально его длине.

Компьютерные расчеты и эксперименты продолжают в следующих направлениях:

- а) увеличение длины рассматриваемого временного интервала;
- б) увеличение числа тел, т.е. выполнение компьютерных экспериментов с задачей трех и более тел.

Расчеты производились в пакетах Maple и Mathematica и сравнивались.

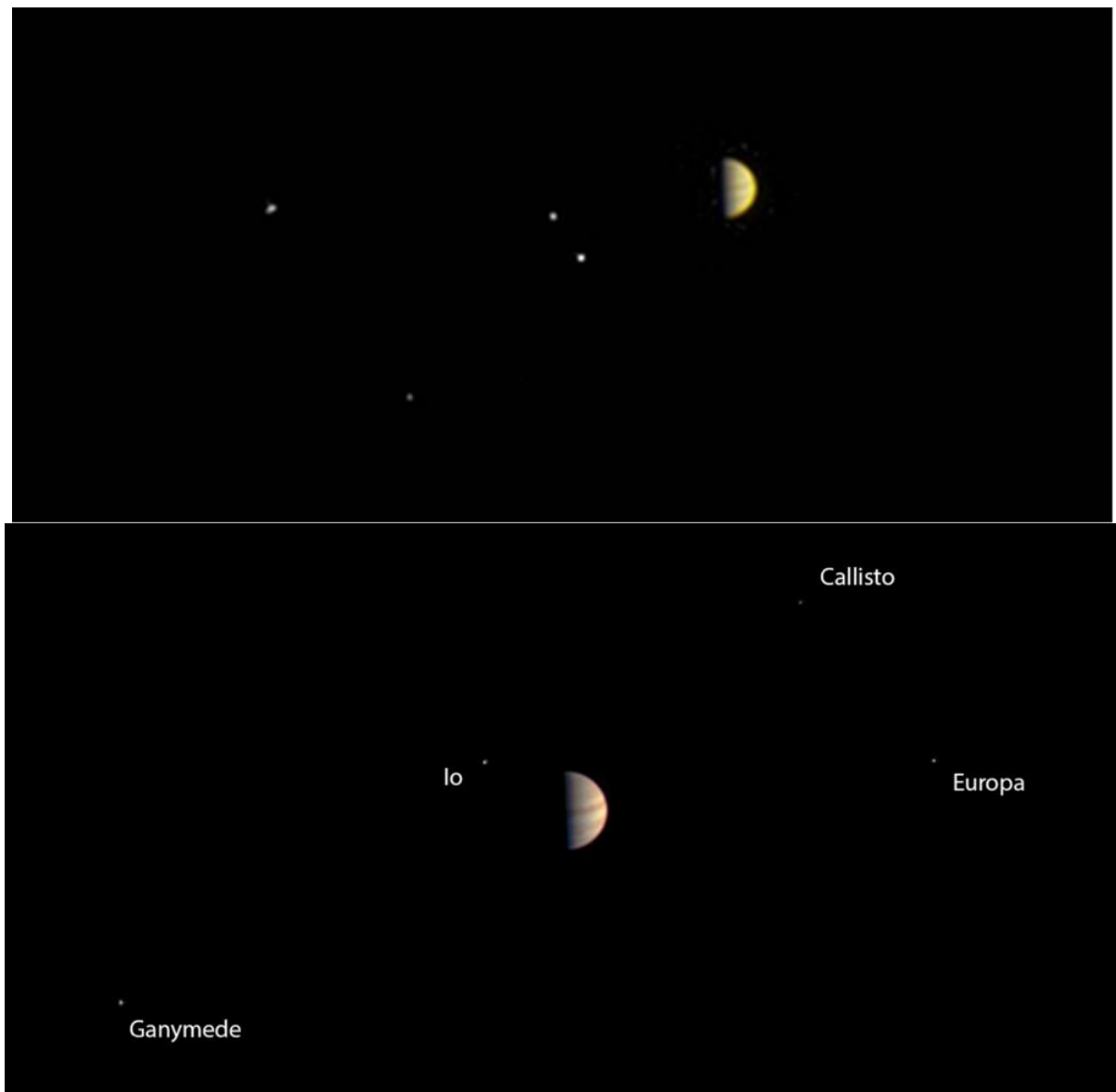


Рисунок 8- Снимок Юпитера и его 4 крупнейших спутников Ио, Европы, Ганимеда и Каллисто из 67 с расстояния а) 10,9 млн километров 21.06.16 б) 6,3 млн километров 29.06.16 (www.nasa.gov) .



Рисунок 9- Снимок Юпитера и его спутников с расстояния 10,9 миллионов километров 21.06.16

Литература

1. Динамика жидких и газовых эллипсоидов / Сборник статей // Ред. А.В. Борисов, И.С. Мамаев. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 364 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. Петкевич Е.В. Задача двух жидких тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – 3. – № 9. – С. 424 – 428.
4. Петкевич Е.В. Уравнения внешней задачи двух тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – 3. – № 11. – С. 522 – 525.
5. Стеклов В.А. Работы по механике. – М.-Ижевск: ИКИ, 2011. – 492 с.
6. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. – Т. 3. – М.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.
7. Судаков С.Н. Об уравнениях движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью переменной вязкости // Труды ИПММ НАН Украины. – 2000. – 5. – С. 141 – 144.
8. Судаков С.Н. О колебаниях вращающихся жидких гравитирующих эллипсоидов переменной вязкости // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 217 – 226.
9. Chandrasekhar S. Ellipsoidal figures of equilibrium. – New Haven and London: Yale university press, 1969. – 98 p.
10. Ядрицкий В.С. Теория фигур небесных тел. – М.-Ижевск: ИКИ, 2011. – 300 с.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.

Андрюхин А.І., Судаков С.Н. Комп'ютерний розрахунок завдання взаємодії двох рідких гравитуючих тел: супутники Юпітера. Отримано рівняння руху для задачі двох тіл, одне з яких - рідкий еліпсоїд змінної в'язкості, що здійснює однорідне вихровий рух, а інше - сферично симетричне тверде тіло. Для вирішення рівнянь використаний чисельний метод Рунге-Кутта. Для прикладу наведено розрахунки руху систем з масово-геометричними параметрами, системи Юпітер-Іо, Юпітер-Ганімед, Юпітер-Європа і Юпітер-Каллісто.

Ключові слова: рідкий еліпсоїд, завдання двох тіл, Іо, Ганімед, Європа, Калліст, Юпітер

Andryukhin AI, SN Sudakov Computer calculation problem of interaction of two liquid gravitating bodies: the moons of Jupiter. We obtain the equations of motion for the two-body problem, one of which - a liquid ellipsoid of variable viscosity, a homogeneous rotational motion, and the other - a spherically symmetrical solid. To solve the equations used numerical method of Runge-Kutta. As examples, we calculate traffic systems with mass-geometric parameters, the system of Jupiter-Io, Jupiter-Ganymede, Jupiter Europa Jupiter and Callisto.

Keywords: liquid ellipsoid, two-body problem, Io, Ganymede, Europa, Callisto, Jupiter

Стаття поступила в редакцію 20.05.2016
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом