УДК 531.38

Математические аспекты в моделировании движений гидростата с неподвижной точкой

Г.В. Горр[1], А.А. Илюхин[2], А.М. Ковалев[1]
1 Государственное учреждение “Институт прикладной математики и механики”, ДНР,
отдел прикладной механики, отдел технической механики;
2 Таганрогский государственный педагогический институт, (г. Таганрог, Россия),
кафедра математики
E-mail: kovalev@iamm.su

Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М. Математические аспекты в моделировании движений гиростата с неподвижной точкой. *Доклад посвящен исследованию математических подходов в моделировании сложных механических систем класса “гиростат”. Рассмотрены две задачи о движении гиростата с неподвижной точкой. Первая задача посвящена моделированию движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом в поле силы тяжести. Для нее указаны методы интегрирования уравнений движений с помощью первых интегралов. Вторая задача характеризуется переменным гиростатическим моментом, обусловленным неравномерным вращением несомых тел. Указан метод исследования программных (моделируемых) движений, основанный на теории инвариантных соотношений неавтономных дифференциальных уравнений.*
Ключевые слова: гиростат, дифференциальные уравнения, интеграл, энергия

Введение

В современном математическом моделировании сложных объектов технических конструкций (роботов, манипуляторов, спутников и гироскопических приборов) широкое применение получила модель системы связанных твердых тел, называемая гиростатом. Характерными особенностями этой модели являются свойства: тело-носитель имеет произвольную форму; несомые тела симметричной формы имеют два режима вращения (для первого режима скорости несомых гироскопов постоянны, для второго режима они зависят от времени).

В докладе рассмотрены оба указанных случая.

В первом случае при математическом моделировании используются уравнения Эйлера–Пуассона и их первые интегралы. Исследованы особенности применения первых интегралов при интегрировании уравнений движения гиростата.

При рассмотрении второго случая, в силу отсутствия у дифференциальных уравнений интеграла энергии, предлагается метод исследования программных движений, основанный на методе инвариантных соотношений неавтономных дифференциальных уравнений.

Применение первых интегралов уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом

В докладе рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\times a\mathbf{x} + s(\mathbf{e}\times\boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times a\mathbf{x}, \quad (1)$$

которая допускает три первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} = k, \quad (2)$$
$$\mathbf{x}\cdot a\mathbf{x} - 2s(\mathbf{e}\times\boldsymbol{\nu}) = 2E,$$

где k и E – произвольные постоянные.

Переменными задачи являются вектор-функции $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(t)$. Векторы $\mathbf{e}, \boldsymbol{\lambda}$, матрица $a = (a_{ij})$, постоянная s характеризуют распределение масс тела, гиростатический момент, гирационный тензор.

При исследовании редукции уравнений (1) к системе меньшего порядка в ряде статей (см., например, [1]) вместо уравнений Пуассона из (1) используются первые интегралы (обзор результатов по редукции (1), (2) дан в монографии [2]). То есть исходная система (1) заменяется первым уравнением из (1) и интегралами (2). Поэтому актуальна проблема математической эквивалентности системы уравнений (1) системе, состоящей из первого уравнения системы (1) и интегралов (2).

В докладе рассмотрен пример решения, которое удовлетворяет первому уравнению из (1) и соотношениям (2), но не удовлетворяет второму уравнению из (1). Положим $\lambda = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$, $a_{23} = 0$ и параметры решения.

$$x_1 = a_* \cos\sigma ,$$
$$x_2 = a_* \sin\sigma , \qquad (3)$$
$$x_3 = n ,$$
$$v_1 s = a_* a_{13} n \cos\sigma ,$$

подчиним условиям

$$s^2 = n^2 a_{13}^2 (n^2 + n a_*^2) ,$$
$$ks = n a_{13} (a_*^2 + n^2) , \qquad (4)$$
$$2E = a_*^2 a_{11}^2 + a_{33}^2 n^* .$$

В (3), (4) a_*, n – постоянные, σ – вспомогательная переменная. Непосредственной подстановкой (3), (4) в (1), (2) нетрудно убедиться в том, что решение (3), (4) удовлетворяет первому уравнению из (1), соотношениям (2), а второму уравнению из (1) не удовлетворяет. В статье [3] такие решения названы особыми (или посторонними) и для исследования редукции (1) на первых интегралах (2) вычислены производные соотношений (2) в силу только первого уравнения системы (1):

$$\mathbf{e} \cdot (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v} \times a\mathbf{x}) = 0,$$
$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v} \times a\mathbf{x}) = 0 , \qquad (5)$$
$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v} \times a\mathbf{x}) = 0 .$$

Из уравнений (5) следует, что если векторы $\mathbf{e}, \mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}$ не являются компланарными, то выполняется второе уравнение из (1). В случае, когда имеет место равенство из (5)

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) = 0 , \qquad (6)$$

второе уравнение из (1) может не иметь места. То есть построенные решения системы (1) возникают на многообразии (6). Следствием условия (6) является равенство

$$(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2 = n^2 , \qquad (7)$$

которое вытекает из первого уравнения системы (1). В статье [4] показано, что инвариантное соотношение для исходной системы (1) может выполняться только на множестве M интегрального множества $N\ (M \subset N)$, которое описывается прецессиями гиростата [2]. Таким образом, при исследовании уравнений движения гиростата в случае (1) моделирование прецессионных движений гиростата должно осуществляться дополнительно. Это свойство должно учитываться и в моделировании движений гиростата в полях сложной структуры (например, в случае, когда гиростат движется в магнитном, электрическом и ньютоновском полях).

Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом

В этом случае движение гиростата описывается неавтономной системой дифференциальных уравнений. Рассмотрим общий случай такой системы:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, ..., x_n, t) \quad (i = \overline{1,n}) \ . \qquad (8)$$

В системе (8) t – независимая переменная, $x_1, ..., x_n$ – неизвестные функции этой переменной, а X_i – функции от $n+1$ переменных, заданные на некотором открытом множестве U пространства размерности $n+1$, в котором координатами являются компоненты вектора $(x_1, ..., x_n, t)$. Будем предполагать, что функции $X_i(x_1, ..., x_n, t) \quad (i = \overline{1,n})$ имеют непрерывные частные производные любого порядка.

При рассмотрении неавтономной системы (8) целесообразно преобразовать ее к автономному виду. Полагая $t = x_{n+1}$, уравнения (8) можно записать в виде

$$\dot{u}_i = Y_i(u_1, ..., u_{n+1}) \quad (i = \overline{1, n+1}) , \qquad (9)$$

где $Y_i \equiv X_i,\ i = \overline{1,n};\quad Y_{n+1} \equiv 1$. Решению уравнений (8) с начальными условиями $x_i(t_0) = x_i^{(0)}$ будет соответствовать решение уравнений (9) начальными условиями

$$u_i(0) = x_i^{(0)} \quad (i = \overline{1,n}) ,\ u_{n+1}(0) = t_0 . \qquad (10)$$

Это соответствие определяется зависимостью $x_i(t) = u_i\ (t - t_0) \quad (i = \overline{1,n})$.

Определение 1. Непустое множество $M \subseteq U$ называется инвариантным по отношению к (9), если для любой точки $(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}, t_0)$ из M решение уравнения (9) с начальными условиям (10) удовлетворяет условию $(u_1(t), ..., u_{n+1}(t)) \in M$ при $t \in (t_1 - t_0, t_2 - t_0)$, где (t_1, t_2) – интервал существования соответствующего решения системы (8).

Рассмотрим программное движение механической системы, которое задано уравнением

$$f(u_1, ..., u_{n+1}) = 0 \ . \qquad (11)$$

Предположим, что функция $f(u_1, ..., u_{n+1})$ дифференцируема по всем переменным до произвольного порядка, в частности до порядка $n+1$, и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial u_{n+1}} \right) \neq 0 \qquad (12)$$

в рассматриваемой области U.

Определение 2. Соотношение (11) называется инвариантным соотношением (ИС) системы (9), если множество G точек, удовлетворяющих этому соотношению, содержит некоторое инвариантное множество.

Поскольку инвариантное множество по определению не может быть пустым, то и ИС должно быть совместным (т.е. должна существовать по крайней мере одна точка, для которой (4) выполнено). Поставим задачу об исследовании условий существования ИС (11) системы (9).

В докладе для функции (11) построена последовательность функций

$$f^{(1)}(u_1, ..., u_{n+1}) = f(u_1, ..., u_{n+1})$$

$$f^{(l)}(u_1, ..., u_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f^{\,l-1}(u_1, ..., u_{n+1})}{\partial u_j} Y_j(u_1, ..., u_{n+1}), \quad (13)$$

$$l = 2,3,\dots,$$

члены которой являются производными от соответствующих функций в силу уравнений (9).

Лемма 1. *Пусть для уравнений (9) соотношение (11) – инвариантное, и множество* G*, определяемое им, содержит инвариантное множество* M*. Тогда для точек множества* M *должны выполняться уравнения*

$$\begin{gathered} f^{(1)}(u_1, ..., u_{n+1}) = 0 \\ f^{(2)}(u_1, ..., u_{n+1}) = 0 \ , \\ f^{(l)}(u_1, ..., u_{n+1}) = 0 \\ ... \quad ... \quad ... \end{gathered} \quad (14)$$

Доказательство. Рассмотрим множество M. Выберем произвольную точку $(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}, t_0)$ (обозначим ее $u^{(0)}$ этого множества и возьмем решение $u_i = u_i(t)$, удовлетворяющее начальным условиям (10)). Поскольку $M \subseteq G$, то в силу определения ИС при подстановке решения в уравнения (11) получим тождество по t:

$$f^{(1)}(u_1(t), ..., u_{n+1}(t)) = 0\,. \quad (15)$$

Многократно дифференцируя это тождество по t, получим

$$\begin{gathered} f^{(2)}(u_1(t), ..., u_{n+1}(t)) = 0 \ , \\ ... \\ f^{(l)}(u_1(t), ..., u_{n+1}(t)) = 0 \ , \\ ... \quad ... \quad ... \end{gathered} \quad (16)$$

Поскольку тождества (15) и (16) справедливы для всех t, то они верны и при $t = 0$, а значит и для точки $u^{(0)}$. В силу же произвольности $u^{(0)}$ получаем, что соотношения (14) выполнены всюду на M.

Отметим, что в общем случае для составления цепочки производных необходимо потребовать бесконечную дифференцируемость функции $f(u_1, ..., u_{n+1})$.

В докладе доказана:

Теорема 1. *Если в последовательности (13) существует* k *независимых членов, то независимыми будут и первые* k *членов последовательности (13).*

Из этой теоремы вытекает следствие.

Следствие 1. *Если существует непустое множество* M *, определяемое уравнениями (14), то система (14) равносильна своим первым* k *уравнениям, где* k *– максимальное количество независимых функций в последовательности (13).*

Пусть поставлена задача о нахождении уравнений, определяющих множество M при заданном ИС (11). Согласно доказанной выше теореме, необходимо построить цепочку производных (13). Затем нужно поэтапно провести исследование зависимости входящих в (11) уравнений. То есть на первом этапе следует провести исследование зависимости производной $f^{(2)}(u_1, ..., u_{n+1})$ от соотношения (11). Если будут найдены условия, при выполнении которых

$$f^{(2)}(u_1, ..., u_{n+1})\Big|_{f^{(1)}(u_1, ..., u_{n+1})=0} \equiv 0\,,$$

то множество G является инвариантным.

Очевидно, что при дальнейшем изучении системы (14) необходимо рассмотреть случаи

Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом

$$f^{(l)}(u_1, ..., u_{n+1})\Big|_{f^{(1)}(u_1, ..., u_{n+1})=0, ..., f^{(l-1)}(u_1, ..., u_{n+1})=0} \equiv 0$$

В докладе изложенные результаты применены в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Изучены условия существования равномерных вращений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием силы тяжести:

$$\begin{gathered} A\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{L} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega} + A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu}, \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{L}. \end{gathered} \quad (17)$$

В уравнениях (17) введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\mathbf{L}$ – вектор-функция, характеризующая взаимодействие тела-носителя и носимых тел; A – тензор инерции; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором $\mathbf{OC}$, где O – неподвижная точка, C центр тяжести гиростата.

На основе теоремы 1 найдены условия

существования равномерных вращений гиростата. Данная методика может быть использована в других задачах моделирования движений гиростата.

Литература

1. Hess W. Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann.– 1890.– B. 37, H. 2.– S. 153–181.

2. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – Киев: Наукова думка, 2013. – 408 с.

3. Горр Г.В., Илюхин А.А., Харламова Е.И. Об особых решениях одной формы уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 3–9.

4. Горр Г.В., Илюхин А.А. Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 9–15.

5. Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н. Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений // Доклады НАН Украины. Математика. – 2014, № 2. – С. 13–19.

6. C. Baiocchi: Problémes à frontiére libre et inéquations variationelles / C. Baiocchi. –C. R. Acad. Sci. Paris, sér. A. – 976 – V. 283. – P.29-32.

7. Duvaut M.G. Solytion of two phases Stefan problem by variational inequality / M.G. Duvaut // In. Proc. Of the Symp. on moving boundary problems. – Oxford, mars, 1974. – P. 25-27.

8. Brézis H. Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities. III. / A. Friedman // J. Math. – 1976. – V. 20, №1. – P.82-97.

9. Caffarelli L.A. The one-phase Stefan problem and the porous medium equation. Continuity of the solution in n-space dimensions / L.A. Caffarelli, A. Friedman. – USA : Proc. Mat. Acad. Sci, 1978. – V.75. – 2004 p.

10. Kinderlehrer D. The smoothness of the free boundary in the phase Stefan problem /D.Kinderlehrer, L. Nirenberg. – Séminare Brézis, 1975.

Горр[1] Г.В., Илюхин[2] А.А., Ковалев[1] А.М.

1 Державна установа "Інститут прикладної математики і механіки", ДНР, відділ прикладної механіки, відділ технічної механіки;

2 Таганрозький державний педагогічний інститут, (м. Таганрог, Росія), кафедра математики

Математические аспекты в моделировании движений гиростата с неподвижной точкой.

Доповідь присвячено дослідженню математичних підходів у моделюванні складних механічних систем класу "гіростат". Розглянуто дві задачі про рух гиростата з нерухомою точкою. Перша задача присвячена моделюванню руху гиростата з постійним гиростатическим моментом у полі сили тяжіння. Для неї вказані методи інтегрування рівнянь рухів з допомогою перших інтегралів. Друга задача характеризується змінним гиростатическим моментом, обумовленим нерівномірним обертанням несомих тіл. Вказаний метод дослідження програмних (модельованих) рухів, заснований на теорії інваріантних співвідношень неавтономних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: гідростат, диференціальні рівняння, інтеграл, енергія.

G. V. Gorr[1], A. A. Ilyukhin[2], A. M. Kovalev[1]

1 State institution "Institute of applied mathematics and mechanics", DNR;

2 Taganrog state pedagogical Institute (Taganrog, Russia)

Mathematical aspects of modeling motions of a gyrostat with a fixed point.

The report focuses on the study of mathematical approaches in modeling of complex mechanical systems class "gyrostat". Considered two problems of motion of a gyrostat with a fixed point. The first task deals with the modeling of motion of a gyrostat with constant virostaticski point in the gravity field. For it illustrates the methods of numerical integration of equations of motions using the first integrals. The second task is characterized by a variable gyrostatic momentum, due to the uneven rotation of the carried bodies. This method of research software (simulated) movements based on the theory of invariant ratios of no autonomous differential equations.

Keywords: gyrostat, differential equations, integral energy.

Статья поступила в редакцию 20.05.2016
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук В.Н. Павлышом