УДК 517.9

Численное моделирование процесса кристаллизации

Миненко А.С., Радевич Е.В.
Донецкий национальный технический университет
radevich_katerina@mail.ru

Миненко А.С., Радевич Е.В. Численное моделирование процесса кристаллизации. *Исследуется одна задача Стефана с учетом конвекции в жидкой фазе. Построено приближенное решение этой задачи с использованием малого параметра. Управление процессом осуществляется с применением нечеткой логики.*

Ключевые слова: *функционал, кристаллизация, тепловой поток, управление, краевая задача, моделирование*

Введение

Распространения тепла в различных средах оказывает большое влияние на характер протекания многих важных для практики процессов. Среди задач, связанных с распространением тепла, выделяется класс задач, в которых исследуемое вещество переходит из одной фазы в другую с выделением или поглощением тепла.

Целью данной работы является моделирование процесса кристаллизации металла, изучение процесса завершения получения слитка в кристаллизаторе путем его вытягивания.

Рассматривается задача управления информационными процессами при автоматизации технологий тепловой обработки металла, на основе математического моделирования, анализа статистических данных и теплофизических экспериментальных измерений. В качестве источника информации исследуется математическая модель, основанная на пространственной задаче Стефана, с учетом конвективного движения и примесей в жидкой фазе.

Постановка задачи.

Пусть D = (-1< x < 1, y < 0) полуполоса, заполненная твердым металлом. Обозначим через u (x, y) температуру этого металла. Требуется определить температуру u (x, y) по следующим условиям:

$$u_{xx} + u_{yy} + \omega u_y = 0, (x, y)\in D, \quad (1)$$

$$u_x \pm \omega_0 u = 0, x = \pm 1, -\omega < y < 0, \quad (2)$$

$$u (x, -\infty) = 0, \quad (3)$$

$$u_y (x, 0) = v (x), -1 \le x \le 1, \quad (4)$$

здесь ω и ω_0 – постоянные, соответственно, число Пекле и Нуссельта.

Решение задачи (1)-(4) имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\omega}\frac{\cos\lambda_n x^{\mu_n Y}}{\mu(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_n}{\lambda_n^2})}\int_{-1}^{1}v(\zeta)\cos\lambda_n\zeta d\zeta, \quad (5)$$

где $\mu=-\frac{\omega}{2}+\sqrt{\frac{\omega^2}{4}+\lambda_n^2}$, где n = 1,2,3,...λ_n - положительные корни уравнения $\lambda=\omega_0 ctg\lambda$.

Отождествим теперь температуру u (x, y) с температурой твердого слитка находящегося в кристаллизаторе при электрошлаковом переплаве. Для вытягивания слитка из кристаллизатора поверхность слитка предварительно обогревается тремя электронными лучами W1, W2 и W3, причем мощность W3 одного из низ равномерно распределена в центральной зоне { -1 ≤ x ≥ 1, y = 0}, а два других сконцентрированы по краям x = ±1 [1]. Независимо от того, в каком отношении находится температура поверхности слитка с критической температурой $T^к$, при которой поверхность слитка отделяется от стенок кристаллизатора, теплообмен слитка с кристаллизатором осуществляется по формуле (2). Для получения температуры слитка достаточно положить в формуле (5) v(x) = (W_1, W_2, W_3).

Далее введем в рассмотрение функционал:

$$I(v)=\int_{n}^{0}(u(1,y)=T^k)^2dy \quad (6)$$

$\min I(v_n+e_n(v_{n-1}-v_n))$, 0 ≤ e_n ≤ 1 (2). В качестве области определения функции U берется множество кусочно-постоянных ступенчатых функций: $v=v_{k,}x_k\le x\le x_{k+1}, v_k=const, k=0,1,2,...,m.$

При этом формула (5) имеет вид:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\omega}\frac{\cos\lambda_n x e^{\mu_n y}}{\mu_n(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_n}{\lambda_n^2})}\sum_{k=0}^{m}v_k\frac{\sin\lambda_n x_{k+1}-\sin\lambda_n x_k}{\lambda_n},$$

$$aI(v)=I(v_0,v_1,v_2,...,v_m).$$

При численной реализации задачи необходимо учесть ограничение 2500 ≤ v(x) ≤ 5000, здесь v(x) – мощность потока в единицах МВт/м^2, а также ω = 2,66, ω = 3,05.

1. Решение задачи методом нулевого приближение.

Найдем минимум функционала (6), в случае когда $u_0(x,y)=f_0(x,y)\vartheta$, где

$$f_0(x,y)=2\frac{\cos\lambda_0 x\sin\lambda_0}{\lambda_0\mu_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}e^{\mu_0 y}.$$

Минимум функционала (6) находим из условия

$$\frac{\partial I}{\partial v}=0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$v_0=4T^*\frac{\mu_0\lambda_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}{\sin 2\lambda_0},$$

$$I(v_0)=v_0^2\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{2\lambda_0^2\mu_0^3(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}-$$

$$-(T^*)^2H-2T^*v_0\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}$$

Первое приближение. Найдем теперь минимум функционала (6), в случае когда

$$u_1(x,y)=(f_0(x,y))v,\text{ где}$$

$$f_1(x,y)=2\frac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}\frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}.$$

Поступая, аналогично тому, как это было сделано в случае нулевого приближения, получим:

$$v_1=2T^*[\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}+\frac{\sin 2\lambda_2(1-e^{\mu_2 H})}{\lambda_1\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}]A,$$

$$A=\frac{\sin^2\lambda_0(1-e^{\mu_2 H})}{\lambda_0\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^2}+\frac{\sin^2 2\lambda_1(1-e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^2(1+\omega_1\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})^2}+$$

$$+2\frac{\sin 2\lambda_0\sin 2\lambda_1}{\mu_0\lambda_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}\frac{(1-e^{\mu_0 H})(1-e^{\mu_1 H})}{\mu_0\lambda_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\mu}{\lambda_1^2})}.$$

Далее, имеет место следующая формула:

$$I(v_1)=v_2^1\frac{\sin^2 2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{2\mu_0^3\lambda_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_1^2})^2}+v_1^2\frac{\sin^2 2\lambda_1(1-e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^3\lambda_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})^2}+$$

$$+2v_1^2\frac{\sin 2\lambda_0\sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_1 H})(1-e^{\mu_0 H})}{\mu_1\lambda_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})\mu_0\lambda_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}-$$

$$-2T^*v_1[\frac{\sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_1\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}+\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}]-H(T^*)^2.$$

Приближение любого порядка. Аналогичным образом можно исследовать минимум функционала I(v$_n$), когда

$$u_n(x,y)=2\frac{v_n\sin\lambda_0\cos\lambda_0 x(1-e^{\lambda_0 H})}{\lambda_0\mu_0[1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}]}e^{\mu_0 y}+$$

$$+2\omega_0 v_n\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\lambda_k x\cos\lambda_k(1-e^{\mu_k H})}{\lambda_k^2\mu_k[1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}]}e^{\mu_k y}$$

Оценить погрешность предлагаемого метода вычисления минимума функционала (6) можно, используя следующее утверждение.

При достаточно малых значениях ω и при (x,y) $\in\overline{D}$ справедлива оценка:

$$|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\lambda_k x\cos\lambda_k(1-e^{\omega_k H})}{\lambda_k^2\mu_k[1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}]}e^{\mu_k y}|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2}e^{\mu_k y}$$

При доказательстве этого утверждения

воспользоваться соотношением:
$\lambda_k = n\pi + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ для всех n[2]
Справедливо также утверждение. Пусть выполнены условия $\omega_0 \geq \omega\sqrt{2} tg \omega\sqrt{2}$,

$$0 < \omega \leq A,\ 0 < \omega \leq \frac{\pi^2}{16},\ 0 < v_0 \leq v(x) < v_1,$$

при $x \in [-1,1]$, где v_0 и v_1 – некоторые постоянные. Тогда решение краевой задачи (1)-(5) удовлетворяет следующим условиям при (x,y) $\in \overline{D}$:

$$u_y(x,y) \leq C_1\omega \exp(\mu_0 y) \leq C_1\omega \exp(\omega y)$$

$$C_0 = \exp(\mu_0 y) \leq u(x,y) \leq C_1 \exp(\mu_0 y) C_1 \exp(\omega y),$$

где $C_1 = \dfrac{6 + A(1+\cos\sqrt{A})}{3(1+\cos\sqrt{A})},\ C_0 = \dfrac{3(1-A)(1+\cos^2\sqrt{A})\cos^2\sqrt{A}}{6 + A(1+\cos^2\sqrt{A})}.$

Для утверждения необходимо сравнить с помощью принципа максимума функции $u_y(x,y)$ и $v_y(x,y)$, где $v(x,y)$ – решение задачи (1)-(5) в предположении, что $v_y(x,0) = v_1$ при $x \in [-1,1]$. Далее, рассматривается функция $f(x,y) = v_y(x,y) - u_y(x,y), (x,y) \in \overline{D}$ и доказывается, что $f(x,y)$ в $\overline{D}$.
Действительно, функция $f(x,y)$ не может принимать наименьшее отрицательное значение внутри D в силу принципа максимума. На вертикальных частях границы x = ±1 функция $f_x(x,y)$ также не может принимать отрицательный минимум. В такой точке имели бы $f_x(x,y) < 0$, между тем $f_x(x,y) = -\omega_0 f(x,y) > 0$, x=±1, так как $f(x,y) < 0$, по предложению. На бесконечности функция $f(x,y)$ исчезает, т.е. $f(x,-\infty) = 0$. На границе y = 0, -1≤ x ≤ 1 имеет $f(x,0) = v_y(x,0) - u_y(x,0) = v_1 - -v(x) \geq 0$
Следовательно, всюду в $\overline{D}$ справедливо неравенство $u_y(x,y) \leq v_y(x,y)$ при (x,y) $\in \overline{D}$.
Отсюда с помощью интегрирования по переменной y следует оценка для функции u(x,y) сверху. Аналогичным образом, можно получить оценку на производную u_2(x,y) сверху при (x,y)є $\overline{D}$. Полученные оценки позволяют оценить температуру u(x,y) и тепловой поток внутри области D не прибегая к решению задачи (1)-(4) [3-4].
Проделанные численные результаты задачи представлены в таблице 1.

3. Математическое моделирование процессов кристаллизации металла с учетом конвекции и примесей.

Пусть Γ_0 – гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри заданной области Ω_0 и R^3, граница которой состоит из двух замкнутых, связанных, гладких поверхностей Γ_0^+ и Γ_0^-, не имеющих самопересечений при этом Γ_0^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Поверхность Γ_0 разбивает Ω_0 на вде подобласти Ω_0^+ и Ω_0^-, которые заняты жидкой и твердой фазами соответственно в момент t=0. Требуется определить области Ω_t^+ u Ω_t^-, занимаемые твердой и жидкой фазами соответственно в момент времени t∈ [0,T], вектор скорости $\vec{V}(x,t)$, давление $p((x,t)$, концентрацию примесей c(x,t), концентрацию примеси c(x,t), температуру жидкой u^+(x,t) и твердой u^+(x,t) фазы по следующим условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \\ = \vartheta \nabla^2 \vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+, c), \\ \nabla \vec{V}(x,t) = 0, (x,t) \in D_T^+; \\ \dfrac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^+(x,t) - \\ -a_+^2 \nabla^2 u^+(x,t) = 0, (x,t) \in D_T^+; \\ \dfrac{\partial u^-(x,t)}{\partial t} - a^2 \nabla^- u^-(x,t) = 0, (x,t) \\ \in D_T^+; \vec{V}(x,0) = \\ = \vec{C}(x); T(\vec{V}, p)\vec{n} = \\ = -q(x,t)\vec{n}, (x,t) \in \Gamma_t^+; \\ V_n = -(1 - \frac{p^-}{p^+} W_n, V_\tau = 0, (x,t) \in \Gamma_t; \quad u^\pm(x,t) = \\ B^\pm(x,t), (x,t) \in \Gamma_t^+ \cup \Gamma_0^-; u^\pm(x,0) = A^\pm(x); \\ u^+ = u^- = T^* - \varepsilon c, k_- \dfrac{\partial u^-}{\partial n} - k_+ \dfrac{\partial u^+}{\partial n} = \\ = xp^+ W_n, (x,t) \in \Gamma_t; \\ \dfrac{\partial c(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)c(x,t) - \gamma \nabla^2 c(x,t) == 0, (x,t) \\ \in D_T^+, \end{cases} \tag{7}$$

$c(x,0) = g_0(x); c(x,t) = g(x,t), (x,t) \in \Gamma_t^+; -\alpha \frac{\partial c}{\partial n} = \beta c W_n, (x,t) \in \Gamma_t,$

Таблица 1. Численные результаты при различных значениях параметров

ω_0	λ_0	λ_1	T	H	v_0	v_1	$I(v_0)$	$I(v_1)$
1,5	0,9882	3,5422	0,9	- 3,0	2,783	4,367	1,011	21,997
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-4,0	2,783	5,730	5,428	38,576
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-6,0	2,783	6,588	-3,038	62,490
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-3,0	2,937	4,610	1,126	24,509
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-4,0	2,937	5,730	-0,559	42,982
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-6,0	2,937	6,954	-3,385	69,627
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-3,0	4,5	4,5	16,728	23,709
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-4,0	4,5	4,5	15,256	24,355
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-6,0	4,5	4,5	12,397	25,275
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-3,0	4,5	4,5	15,537	23,062
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-4,0	4,5	4,5	13,866	23,695
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-6,0	4,5	4,5	10,718	24,696
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-3,0	11,1	11,1	173,683	192,101
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-4,0	11,1	11,1	175,717	198,788
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-6,0	11,1	11,1	173,351	202,940

здесь $D_T^{\pm}= \{(x,t):\ x\in\Omega_t^{\pm},\ t\in(0,T)\}$, $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\partial\Omega^+=\Gamma_t \cup \Gamma_t^+$, $\partial\Omega^- =\Gamma_t^+ \cup \Gamma_t$, $\vec{n}$ – нормаль к Γ_t, направленная в сторону Ω_t^+, $T(\vec{V},p)$ – тензор напряжений с элементами $T_{ij} = -\delta_{ij}p + \nu(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$, V_n и V_τ - нормальная и тангенциальная составляющие, W_n - скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормалям $\vec{n}$; $T^*, \vartheta, \varepsilon, x, p^+, p^-, \alpha, \beta, \gamma, k_+, k_-$ - известные положительные постоянные. Если $\Phi(x,t)=u^{\pm}(x,t) + \varepsilon c(x,t) - T^* = 0$ -- уравнение поверхности Γ_t, тогда $W_n = -\Phi_t/|\nabla\Phi|$.[2]

Заметим, что условия Стефана можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}L(u^+, u^-, \Gamma_t, \varepsilon) = k_-^2|\nabla u^-|^2 - k_+^2|\nabla u^+|^2 + \\ +\varepsilon(k_-^2 + k_- k_+)(\nabla u^-, \nabla c) - \\ -\varepsilon(k_+^2 + k_+ k_-)(\nabla u^+, \nabla c) + xp^+(k_- u_t^- + k_+ u_t^+) + \\ +xp^+\varepsilon(k_+ + k_-)c_t = 0, (x,t) \in \Gamma_t\end{gathered}$$

При некоторых предположениях на функции $A(x), \vec{C}(x), B^{\pm}(x,t), \vec{f}(u^+, c), g(x,t)$ и $g_0(x)$ задача (3.1) разрешима при малых значениях t в классе функций $u^{\pm} \in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\overline{D_+^{\pm}})$, $\vec{V} \in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}\left(\overline{D_+^{\pm}}\right)$, $c \in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}\left(\overline{D_+^{\pm}}\right)$, $\nabla p \in H^{a,\frac{a}{2}}(\overline{D_+^{\pm}})$ а границы Γ_t^+ и Γ_t описываются функциями класса $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}$.

Далее, пусть $Q_T^{\pm} = \Omega_0^{\pm} \times [0,T], \Gamma_{OT} = \Gamma_0 \times [0,T]$, $\Gamma_{OT}^+ = \Gamma_0^+ \times [0,T], \Gamma_{OT} = \Gamma_0 \times [0,T]$

Отметим также, что решение задачи моделирует процесс кристаллизации вещества с учетом конвективного теплообмена и переноса примеси в жидкой фазе.[2]

Свободные границы Γ_t^+ и Γ_t можно представить в следующем виде

$$\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega) * p(\omega,t)\},$$
$$\Gamma_t{}^+ = \{x = x(\theta) + \eta(\omega,t) * \vec{n}(\theta)\}.$$

При достаточно малых значениях чисел ε

Предложен метод решения задачи (3.1),состоящий из разложения решения в ряд по степеням чисел ε:

$$u^{\pm}(x,t,\varepsilon) = u_0^{\pm}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{\pm}(x,t)$$

$$p(x,t,\varepsilon) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x,t)$$

$$V_i(x,t,\varepsilon) = V_{i_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k V_{ik}, \qquad i = 1,2,3;$$

$$p(\omega,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k(\omega,t),\ c(x,t) =$$
$$= c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k(x,t)$$

В работе изучено нулевое $u_0^{\pm}(x), \vec{V_0}(x) = (V_{10}, V_{20}, V_{30}), \Gamma_0, c_0(x)$ и первое приближение $(\overrightarrow{V_1},\ u_1^{\pm}, p_1, \rho_1, c_1)$ для малых чисел ε. При этом установлено, что $u_0^{\pm}(x) = A^{\pm}(x), \vec{V_0}(x) = \vec{C}(x)$, $C_0(x) = g_0(x)$, $\rho_1(\omega,t) \in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$, $u_1^{\pm}(x,t;p) \in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\overline{Q_T^{\pm}})$, $c_1(x,t;\rho) \in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\overline{Q_T^{\pm}})$, причем $\rho_1(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1:

$$M_1\rho_1 = = \frac{1}{x\rho^+}\int_0^1 (k_-\frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u_1^+}{\partial n} + +f_1(x,t))dt,$$

$$x(\omega) \in \Gamma_{\text{OT}}.$$

Из условия Стефана для малых чисел ε следует разложение:

$$L(u^+, u^-, \Gamma_t, \varepsilon) = [k_-^2|\nabla u_0^-|^2 - -k_+^2|\nabla u_0^+|^2 + \varepsilon[2k_-^2(\nabla u_0^-, \nabla u_1^-) - 2k_+^2(\nabla u_0^+, \nabla u_1^+) + f_1 + x\rho^+(k_- u_{1t}^- + k_+ u_{1t}^+)] + \varepsilon^2[2k_-^2(\nabla u_0^-, \nabla u_1^-) - 2k_+^2(\nabla u_0^+, \nabla u_1^+) + f_2 + x\rho^+(k_- u_{2t}^- + k_+ u_{2t}^+)] + 0(\varepsilon^2) = 0, (x,t) \in \Gamma_{\text{OT}}.$$

Откуда следует, что

$$k_-^2|\nabla u_0^-|^2 - k_+^2|\nabla u_0^+|^2 = 0, x \in \Gamma_0;$$

$$k_-\frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1 = x\rho^+\frac{\partial p_1}{\partial t}, (x,t) \in \Gamma_{0\text{T}};$$

$$k_-\frac{\partial u_2^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u_2^+}{\partial n} + f_2 = x\rho^+\frac{\partial p_2}{\partial t}, (x,t) \in \Gamma_{0\text{T}};$$

Здесь $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$ известные гладкие функции[2].

Рассмотрим второе приближение $(\overrightarrow{V_2}, u_2^\pm, p_2, \rho_2, c_2, \eta_2)$ задачи для малых чисел ε. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overrightarrow{V_2}}{\partial t} + (\overrightarrow{V_0}\nabla)\overrightarrow{V_2} + (\overrightarrow{V_1}\nabla)\overrightarrow{V_1} + (\overrightarrow{V_2}\nabla)\overrightarrow{V_0} + +\nabla p_2 = \vartheta\nabla^2\overrightarrow{V_2} + \left[\overrightarrow{f_u'}u_2 + \overrightarrow{f_c'}c_2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{f_{uu}''}u_1^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{f_{cc}''}c_1^2\right], \\ (x,t) \in Q_T^+, \nabla\overrightarrow{V_2} = 0, (x,t) \in Q_T^+, T(\overrightarrow{V_0}, p_2)\vec{n} + T(\overrightarrow{V_1}, p_1)\vec{n} + T(\overrightarrow{V_2}, p_0)\vec{n} = = 0, x \in {\Gamma_0}^+ \\ \overrightarrow{V_2}(x,0) = 0, V_{2n} = \left(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+}\right)\left[\frac{u_{2t}}{\nabla u_0} + +f_3(x,t)\right], V_{2\tau} = 0, x \in \Gamma_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2^+}{\partial t} + (\overrightarrow{V_0}\nabla)u_2^+ + (\overrightarrow{V_2}\nabla)u_0^+ + (\overrightarrow{V_1}\nabla)u_1^+ = = a_+^2\nabla^2 u_2^+, (x,t) \in Q_T^+, \frac{\partial u_2^-}{\partial t} + a_-^2\nabla^2 u_2^- = 0, \\ (x,t) \in Q_T^-, u_2^\pm(x,0) = 0, u_2^\pm(x,t) = = 0, (x,t) \in \Gamma_{\text{OT}}^- \cup \Gamma_{0\text{T}}^+, u_2^+ = u_2^-, \\ |\nabla u_0^\pm(x(\omega))| p_2(\omega,t) + u_2(x(\omega,t) + f(x(\omega,t) = 0, (x,t) \in \Gamma_{\text{OT}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + (\overrightarrow{V_0}\nabla)c_2^+ + (\overrightarrow{V_2}\nabla)c_0^+ + (\overrightarrow{V_1}\nabla)c_1^+ - \quad -\gamma\nabla^2 c_2 = 0, (x,t) \in Q_T^+,\ c_2(x,0) = 0; \quad c_2(x,t) = 0,$$

$$(x,t) \in \Gamma_{\text{OT}}^+, -\alpha\frac{\partial c_2}{\partial n} = \frac{{u_{2t}}^+}{|\nabla {u_0}^+|} + f_4(x,t), (x,t) \in \Gamma_{\text{OT}},$$

$$\frac{\partial c_0}{\partial n}\eta(\omega,t) + c_2(x,t) + f_5(x,t) = 0, (x,t) \in \Gamma_{\text{OT}}$$

где $f_3(x,t), f_4(x,t)\ u\ f_5(x,t)$ - известные функции.

При заданных $\rho_2(\omega,t)$ и $\widetilde{\rho_2}(\omega,t)$ из $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ найдем функции $u_2^\pm(x,t,\rho_2)$ и $u_2^\pm(x,t,\widetilde{\rho_2})$ как единставенные решения задачи. Затем рассмотрим оператор, действующий из $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ в $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$, следующим образом $M_2\rho_2 = \frac{1}{x\rho^+}\int_0^1(k_-\frac{\partial u_2^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u_2^+}{\partial n} + +f_2(x,t))dt, x(\omega) \in \Gamma_{\text{O}}$. Справедливые оценки: $|u_2^\pm|_{QT\pm}^{(\alpha+2)} \le C\left(|F_2^\pm|_{QT\pm}^{(\alpha+2)} + |\rho_2|_{\Gamma_{OT}\pm}^{(\alpha+2)}\right)$, где C – некоторая постоянная, а $F_2^+ = -(\overrightarrow{V_2}\nabla)u_0^+ - (\overrightarrow{V_1}\nabla)u_1^+$ при $(x,t) \in Q_T^+$ и $F_2(x,t) = 0$ при $(x,t) \in Q_T^-$. Отсюда следует, что $|M_2\rho_2 - M_2\widetilde{\rho_2}|_{\Gamma_{OT}}^{(\alpha+2)} \le \tilde{C}|\rho_1 - \rho_2|_{\Gamma_{OT}}^{(\alpha+2)}$ где $\tilde{C} = C(k_+ + k_-)/x\rho^+$ Следовательно, оператор M_2 – сжимающий, если выполняется условие

$$C(k_+ + k_-)/x\rho^+ < 1 \tag{8}$$

Имеют место следующие утверждение:

Лемма 1. Пусть выполнено условие (8). Тогда оператор M_2, действующий из $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ в $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 2. В качестве второго приближения задачи можно взять решение $u_2^\pm(x,t), c_2(x,t), \overrightarrow{V_2}(x,t), p_2(x,t), \rho_2(x,t), \eta_2(x,t)$.

Теорема 1. Пусть $\frac{\partial g_0}{\partial n} \neq 0$ и $g_0(x) = = g(x)$ на Γ_0^+. Тогда при малых значениях t справедливы формулы

$$\Gamma_t: x = x(\omega) - \varepsilon\vec{n}\frac{u_1(x(\omega),t) + g_0(x(\omega))}{|\nabla u_0(x(\omega))|} - -\varepsilon^2\vec{n}\frac{u_2(x(\omega),t) + f_3(x(\omega),t)}{|\nabla u_0(x(\omega))|} + 0(\varepsilon^2), (x,t) \in \Gamma_{\text{OT}}$$

$$\Gamma_t{}^+: x = x(\theta) - \varepsilon\vec{n}\frac{c_1(x(\theta),t))}{\frac{\partial g_0}{\partial n}(x(\omega))} - -\varepsilon^2\vec{n}\frac{c_2(x(\theta),t) + f_5(x(\theta),t)}{\frac{\partial g_0}{\partial n}(x(\omega))} + 0(\varepsilon^2), (x,t) \in \Gamma_{\text{OT}}$$

где $u_2^\pm(x,t), c_1(x,t), \rho_1(x,t), \eta_1(x,t)$ - функции класса $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}$ являющиеся первым приближением задачи.

Вышеуказанные формулы позволяют осуществить анализ свободных границ Γ_t и Γ_t^+ в зависимости от параметров задачи.

Заключение

В заключении приведем обзор теории по данной тематике [5-10]. Также необходимо отметить, что данной статье смоделирован процесс кристаллизации металла. Для решения этой задачи был использован метод нулевого приближения, получившиеся данные в результате решения определены в таблице 1.

Литература

1. Патон Б.Е. Избранные труды. – Киев: Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины, 2008.-893 с.
2. Шевченко А.И., Миненко А.С. Методы исследования нелинейных моделей, - Киев: Наук. Думка, 2012.-132 с.
3. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. Думка, 2005.-341 с.
4. Шевченко А.И., Миненко А.С., Сыпко И.А. Моделирование одного класса сложных систем с нечеткими управлениями // Доп. НАН Украины.- 2013. - №8. – С. 52-54.
5. Миненко А.С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца /А.С. Миненко//Укр. мат. журнал. - 2006. - №10. – С.1385-1394.
6. Minenko A.S. Axially symmetric flow. Fifth SIAM conference on optimization / A.S. Minenko. – Victoria, British Columbia, May 20-22, 1996.-Victoria, 1996.-P.12.
7. Миненко А.С. Аналитичность свободной границы в одной задаче осесимметричного течения / А.С. Миненко // Укр. мат. Журналю – 1998.-№12. С.1693-1700.
8. Миненко А.С. Проблема минимума одного класса интегральных функционалов с неизвестной областью интегрирования / А.С. Миненко// Мат.физика и нелинейная механика. – 1993. – Вып. 16. – С. 48-52.
9. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей / А.С. Миненко – Киев: Наукова думка, 2005. -354с.
10. Миненко А.С. Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана / А.С. Миненко, А.И. Шевченко // Доповіді НАН України. – 2010.-№4. – С.30-34.

Minenko A. S., Radevich E. V. Numerical modeling of the crystallization process. *The Stefan problem with convection in the liquid phase is investigated. The approximate solution is constructed, using the method of small parameter. The control over this process with the use of fuzzy logic is realized.*

Key words: *functional, crystallization, thermal stream, controlling,* boundary value problem, modeling

Миненко А.С., Радевич Е.В. Численное моделирование процесса кристаллизации. *Исследуется одна задача Стефана с учетом конвекции в жидкой фазе. Построено приближенное решение этой задачи с использованием малого параметра. Управление процессом осуществляется с применением нечеткой логики.*

Ключевые слова: *функционал, кристаллизация, тепловой поток, управление, краевая задача, моделирование*

Статья поступила в редакцию 12.2.2017
Рекомендована к публикации д-ром тех. наук В.Н. Павлышом