УДК 622.734.001.57

Математическое моделирование поля скоростей частиц сыпучего материала при перемешивании в ограниченном пространстве

И.В. Тарабаева
Донецкий национальный технический университет
inkatar1@yandex.ru

Тарабаева И.В. Математическое моделирование поля скоростей частиц сыпучего материала при перемешивании в ограниченном пространстве. Представлены результаты исследований процесса распределения скоростей частиц сыпучего материала при его перемешивании в ёмкости ограниченного размера методом математического моделирования. В основу математической модели положены уравнения в частных производных, отражающие физику процесса. Задача решается методом конечных разностей с модификацией, предложенной М.В. Келдышем.

Ключевые слова: *процесс, скорость, уравнение, исследование, метод.*

Введение

В ряде отраслей промышленности (в частности, в процессе обогащения углей, производства ряда химических материалов и др.) важной стадией является обеспечение равномерной структуры конечного продукта, получаемого в виде сыпучей массы, что достигается способом принудительного перемешивания внутри оборудования с ограниченными размерами. Проблема модернизации технологии производства требует исследований параметров процесса, в том числе распределения поля скоростей частиц при перемешивании. В этой связи тема работы является актуальной.

Цель работы

Исследование распределения скоростей частиц в процессе перемешивания и обоснование геометрических и динамических параметров для модернизации аппаратуры и технологии производства.

Основное содержание работы

Для достижения поставленной цели проведены теоретические исследования процесса методом математического моделирования с использованием детерминированных моделей [1, 2].

При переходе от безразмерных величин к реальным значениям параметров в качестве начальных и краевых условий были приняты технические характеристики оборудования, находящегося в эксплуатации на предприятиях углеобогащения.

Разработка математической модели распределения скорости.

Процесс перемешивания происходит внутри аппарата, днище которого снабжено газораспределительной решёткой, через её отверстия подаётся перемешивающий агент.

На рисунке 1 представлена схема аппарата в продольном разрезе.

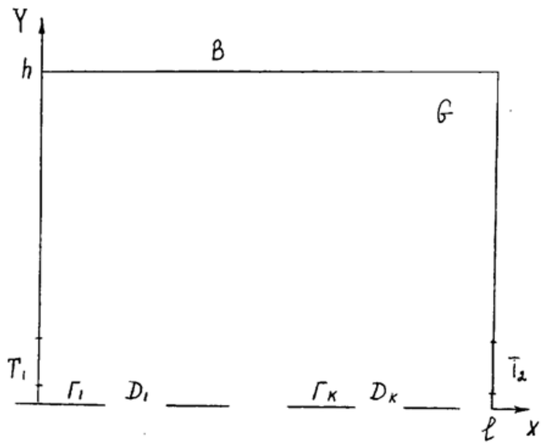

Рисунок 1 – Схема апарата в продольном разрезе

Обозначим область аппарата и его нижнюю часть границы через $Г_К$ (решетка) и $Д_К$ (отверстия в решетке). Будем считать, что вещество, подлежащее перемешиванию, поступает через боковое отверстие Т1, а перемешанное выходит из аппарата через Т2. Оставшуюся часть границы G обозначим через В. Пусть далее $u(x,y)$ – продольная, а $v(x, y)$ – поперечная скорость вещества в камере. Эти компоненты скорости определяем как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{dP}{dx}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x,y)\in G \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \qquad (1)$$

при соответствующих граничных условиях

$$u=0, \quad v=v_0, \quad (x,y)\in T_2. \qquad (2)$$

$$u=u_0, \quad v=v_0, \quad (x,y)\in T_1; \qquad (3)$$

$$u=1, \quad v=0, \quad (x,y)\in Д_K; \qquad (4)$$

$$u=0, \quad v=0, \quad (x,y)\in B\cup Г_K; \qquad (5)$$

Перейдём теперь к численному решению задачи (1) – (5).

Рассматриваем уравнение Навье - Стокса (1) в безразмерном виде.

При применении разностного метода производные, входящие в дифференциальные уравнения, заменяются конечно-разностными отношениями. Область интегрирования покрывается сеткой из 2-х семейств прямых, параллельных оси ОX и оси ОУ.

Пусть $x = x_i$ есть сечение пограничного слоя, в котором профиль скорости задан. Для дальнейших вычислений существенно, чтобы $\Delta x = const$, $\Delta y = const$. Каждый узел сетки отличается индексом (m,n). Зависимая переменная – продольная скорость – предполагается известной на прямых $x = x_m$, $x = x_{m-1}$. Использование схемы центральных конечных разностей приводит в направлении Х к погрешности обрыва процесса порядка $(\Delta x)^2$, а в направлении У к погрешности $(\Delta y)^2$, т.е. получается уравновешенная система. Поэтому применим для нашего расчета такую схему.

Для частных производных продольной скорости u получим следующие выражения через конечноразностные отношения:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3u_{m+1,n}-4u_{m,n}+u_{m-1,n}}{2\Delta x}+\frac{1}{3}\Delta x^2 u_{xxx}+\ldots \qquad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u_{m+1,n+1}+u_{m+1,n-1}}{2\Delta y}+\frac{1}{6}\Delta y^2 u_{yyyy}+\ldots \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{u_{m+1,n+1}-2u_{m+1,n}+u_{m+1,n-1}}{2\Delta x}+\frac{1}{12}\Delta y^2 u_{yyyy}+\ldots \qquad (8)$$

Для линеаризации разностных уравнений используем соотношение:

$$u_{m+1,n}=2u_{m,n}-u_{m-1,n}+\Delta x^2 u_{xx}+\ldots \qquad (9)$$

В линеаризованной форме выражения вида $u(\partial u/\partial x)$ заменяем следующим:

$$(2u_{m,n}-u_{m-1,n})\left(\frac{3u_{m+1,n}-4u_{m,n}+u_{m+1,n}}{2\Delta x}\right).$$

После подстановки этих разностных выражений в уравнения пограничного слоя мы получим разностное уравнение:

$$A_n\cdot u_{m+1,n-1}+B_n\cdot u_{m+1,n}+C_n\cdot U_{m+1,n+1}=F_n \qquad (10)$$

причем

$$A_n=-\frac{\Delta x}{2\Delta y}\left(2V_{m,n}-V_{m-1,n}\right)-\frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}; \qquad (11)$$

$$B_n=\frac{3}{2}\left(2u_{m,n}-u_{m-1,n}\right)+\frac{2\Delta x}{(\Delta y)^2}; \qquad (12)$$

$$C_n=\frac{\Delta x}{2\Delta y}\left(2V_{m,n}-V_{m-1,n}\right)-\frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}; \qquad (13)$$

$$F_n=\frac{1}{2}\left(2u_{m,n}-u_{m-1,n}\right)\cdot\left(4u_{m,n}-u_{m-1,n}\right)-\Delta x\left(\frac{dP}{dx}\right)_{m+1,n}. \qquad (14)$$

$N-1$ уравнений (12), из которых каждое содержит три неизвестных $u_{m+1,n-1}$; $u_{m+1,n}$; $u_{m+1,n+1}$, $n=\overline{2,N}$, связаны одно с другим и могут быть решены как система совместных алгебраических уравнений, т.к. общее число неизвестных равно числу уравнений.

Матрица, соответствующая неизвестным $u_{m+1,n}$, такова, что допускает использовать прямой путь решения, не требующий составления обратной матрицы. Это приводит к значительному сокращению времени вычислительной работы.

Уравнение (10) представляет собой рекуррентное соотношение, которое может быть решено простым способом, особенно пригодным для использования на ЭВМ. Для этого перепишем уравнение (10) еще раз, причем опустим индекс m. Получим:

$$A_n u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1} = F_n, \quad 2 \le n \le N-1, \tag{15}$$

граничными условиями будут

$$u_1 = 0, \quad u_n = u, \tag{16}$$

где u_n есть значение на внешней границе пограничного слоя. Далее примем, что имеет место соотношение:

$$u_n = E_n \cdot u_{n+1} + Д_n. \tag{17}$$

Если мы используем граничное условие $u_1 = 0$ и потребуем, чтобы соотношение (17) соблюдалось независимо от шага Δy, то найдем, что

$$E_1 = 0, \quad Д_1 = 0. \tag{18}$$

Далее из соотношения (18) следует, что

$$u_{n-1} = E_{n-1} \cdot u_n + Д_{n-1}. \tag{19}$$

Внеся это выражение u_{n-1} в уравнение (15) и решив его относительно u_n, получим:

$$u_n = \frac{C_n}{B_n + A_n \cdot E_{n-1}} u_n + \frac{F_n - A_n \cdot Д_{n-1}}{B_n + A_n \cdot E_{n-1}}. \tag{20}$$

Сравнив (18) и (19), мы найдем

$$E_n = -\frac{C_n}{B_n + A_n \cdot E_{n-1}}, \; Д_n = \frac{F_n - A_n \cdot Д_{n-1}}{B_n + A_n \cdot E_{n-1}}. \tag{21}$$

Имея соотношения (21) и значения (18), мы можем последовательно вычислить E_n, $Д_n$ для возрастающих n.

Далее, т.к. значение u_n при $n = N$ известно из второго равенства (16), то мы можем последовательно определить из соотношения (19) все u_n для убывающих n. На этом определение продольной скорости u заканчивается. После того, как значения u_i вычислены для всех i, можно определить из уравнения неразрывности значения v_j, поступая для этого в точности так же, как и при вычислении значения u_n.

Выполнив квадратуру уравнения неразрывности при помощи правила трапеций, мы можем получить:

$$v_{m+1,n} = v_{m+1,n-1} - \frac{\Delta y}{2r^j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(r^S u)_{m+1,n} + \frac{\partial}{\partial x}(r^S u)_{m+1,n-1}\right] - \frac{\Delta y^3}{12} \cdot \frac{1}{r^j}(r^j u(x,\eta))_{xyy}, \tag{20}$$

где η есть некоторое значение между $(n-1)\Delta y$ и $n\Delta y$. Мы видим, что принятая схема центральных разностей при каждом шаге на расстоянии Δy дает погрешность порядка $(\Delta x^2 \Delta y)$ и $(\Delta y)^3$. Решение начинается от стенки, на которой $v = 0$. Т.к. r и u при каждом шаге поперек пограничного слоя известны, то сначала мы можем определить v на расстоянии одного шага от стенки, затем на расстоянии двух шагов и т.д., пока не будет достигнута внешняя граница пограничного слоя.

Внешняя граница пограничного слоя считается достигнутой, когда после нескольких последовательных шагов Δy скорость u остается постоянной внутри некоторого наперед заданного предела точности. Этот контроль относительно внешней границы следует выполнять при каждом шаге Δx.

Изложенный метод конечных разностей сводит задачу расчета пограничного слоя, т.е. задачу интегрирования уравнений в частных производных, к более простой задаче, а именно к решению системы линейных алгебраических уравнений. Т.к. рассматриваемый численный метод всегда устойчив, то величина шага определяется только погрешностью обрыва процесса. Поэтому ее можно выбрать довольно большой, что позволяет сильно сократить время расчета. На рисунках 2 – 7 приведены графики зависимостей продольной и поперечной скоростей.

Результаты исследований показывают, что математическая модель обеспечивает адекватное представление процесса распределения скорости частиц материала в рабочей области аппарата. На рисунке. 2 показано, что основное влияние внешнее воздействие оказывает в придонной области (y = 0), локальные максимумы продольной составляющей скорости соответствуют координатам отверстий в газораспределительной решетке, по мере удаления от днища степень влияния снижается.

При совместном рассмотрении результатов моделирования продольной и поперечной скоростей (рисунки 2 и 3) можно построить полную картину процесса в виде трех- или четырехмерной матрицы (таблицы). На рисунках 4 – 7 приводятся примеры моделирования для разных вариантов модели.

Скорость подачи перемешивающего агента является во многом определяющим параметром для создания «текущего» слоя, исследование распределения продольной и поперечной составляющих в сечении камеры имеет важнейшее значение при изучении процесса формирования «ползущей» поверхности в рабочем объеме аппарата. Варьируя начальные и граничные условия и рассматривая результаты моделирования распределения скорости совместно с распределением температуры для тех же условий, исследователь получает возможность подбора параметров, наиболее приближенных к оптимальным для заданных технических характеристик исследуемого или проектируемого оборудования.

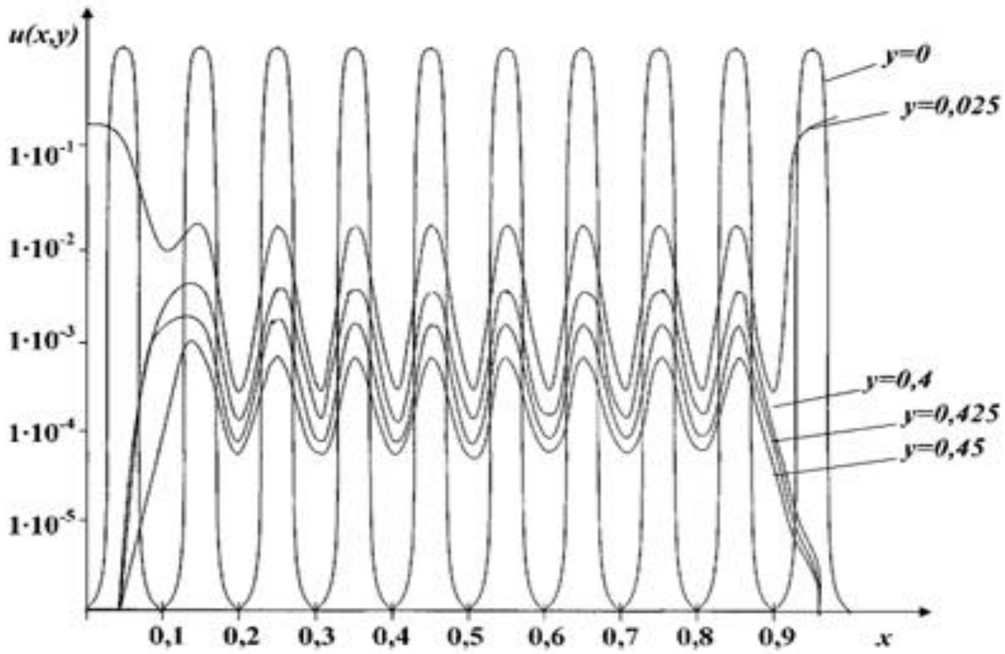

Рисунок 2 – График зависимости продольной скорости u от x при фиксированном значении y (ω1=0,25, ω2=0,2)

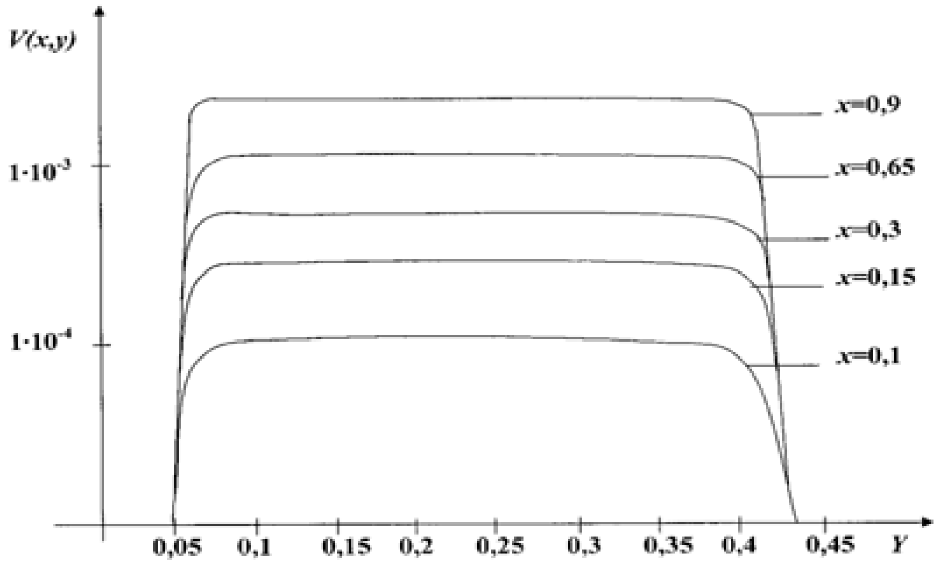

Рисунок 3 – График зависимости скорости v от y при фиксированном значении x (ω1=0,25, ω2=0,2)

Естественно, что такие исследования требуют многократной «прокрутки» моделей на ЭВМ, при этом необходимо иметь показатели, по которым можно оценивать результаты в автоматическом режиме. Подобные задачи решаются средствами математического обеспечения системы автоматизированного проектирования (САПр).

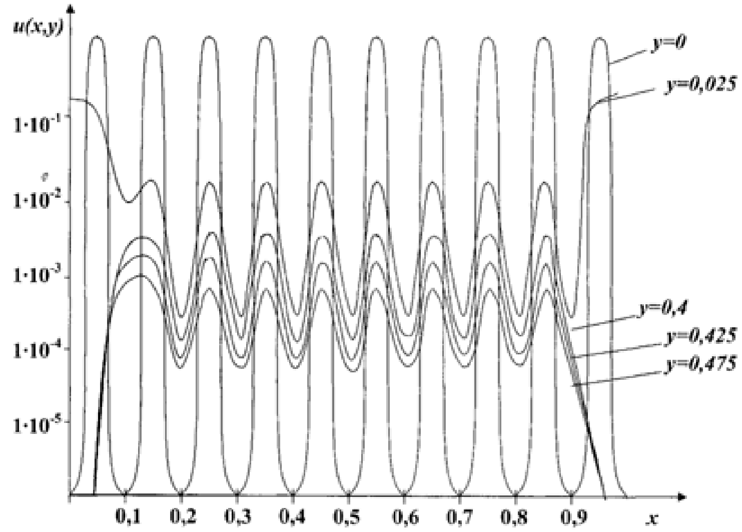

Рисунок 4 – График зависимости продольной скорости u от x при фиксированном значении y (ω1=0,5, ω2=0,1)

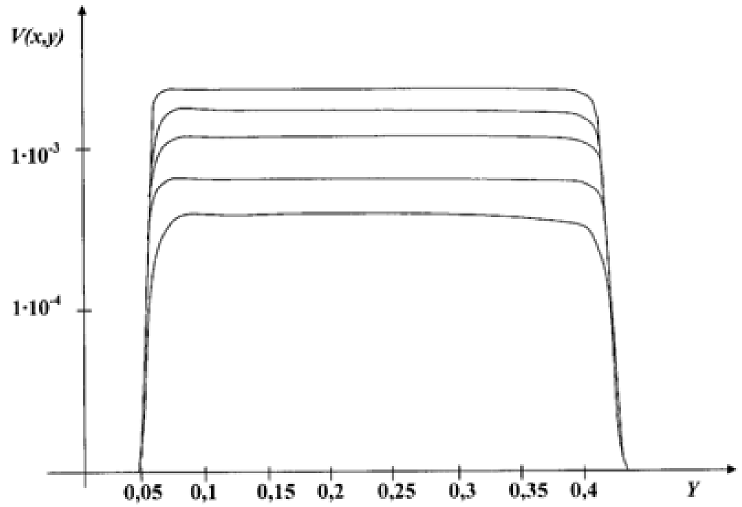

Рисунок 5 – График зависимости скорости v от y при фиксированном значении x (ω1=0,5, ω2=0,1)

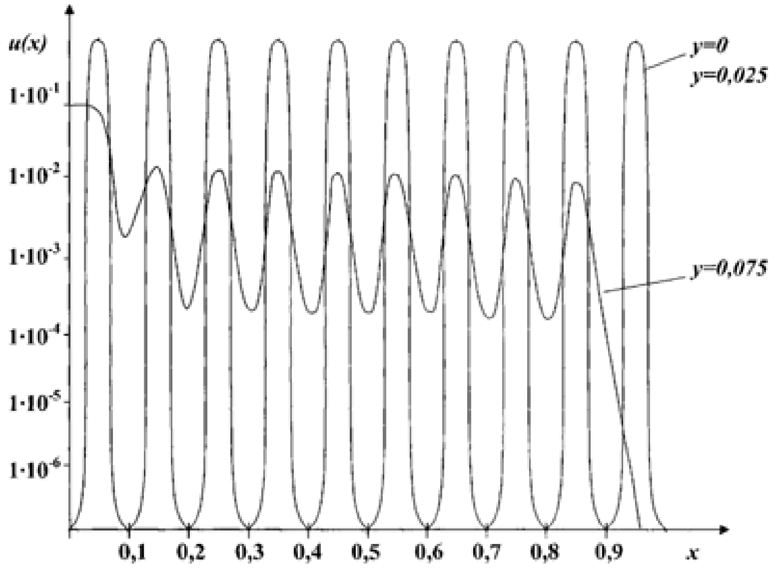

Рисунок 6 – График зависимости продольной скорости и от x при фиксированном значении y (ω1=0.1, ω2=0.05)

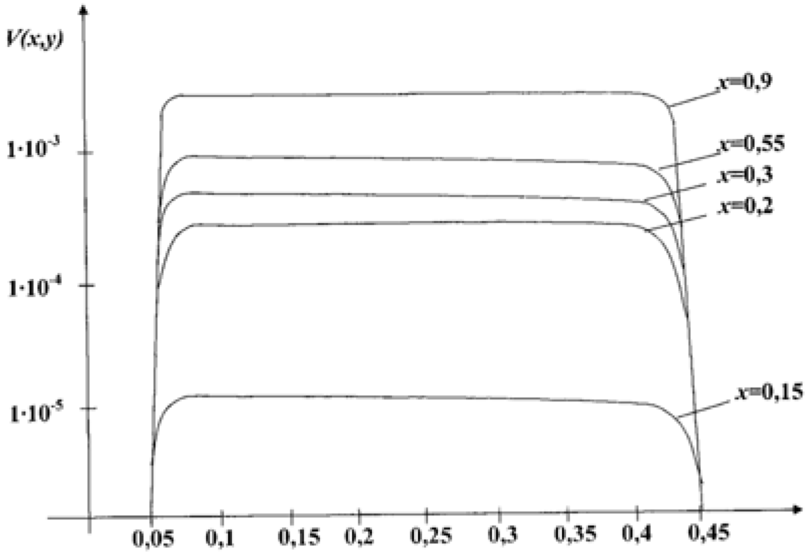

Рисунок 7 – График зависимости скорости v от y при фиксированном значении x (ω1=0.1, ω2=0.05)

Выводы

Предложенные математические модели с достаточной степенью достоверности отражают характер протекания процесса.

Применение детерминированной модели распределения скорости частиц материала в аппарате дает возможность исследовать процесс и обосновывать рациональные значения таких параметров технологии, как скорость перемешивающего агента (входящих газов), плотность газораспределительной решетки, геометрические размеры оборудования.

Кроме того, результаты расчета значений скорости в точках рабочего объема являются коэффициентами модели распределения концентрации материала в камере.

Литература

1. Павлыш В.Н., Тарабаева И.В. Математическое моделирование динамических характеристик процесса сушки обогащенных углей / «Вестник Криворожского технического университета»: Сборник научных трудов, вып.. 14.– Кривой Рог, 2006.– с. 170 – 174..

2. Павлыш В.Н., Тарабаева И.В.

Математическое моделирование процесса обезвоживания увлажненной горной массы / Физико-технические проблемы горного производства: Сборник научных трудов, выпуск 12: «Кинетика и термодинамика физических процессов в горном массиве».– Донецк, 2009.– с. 103 – 107.
.

Тарабаева И.В. Математическое моделирование поля скоростей частиц сыпучего материала при перемешивании в ограниченном пространстве. *Представлены результаты исследований процесса распределения скоростей частиц сыпучего материала при его перемешивании в ёмкости ограниченного размера методом математического моделирования. В основу математической модели положены уравнения в частных производных, отражающие физику процесса. Задача решается методом конечных разностей с модификацией, предложенной М.В. Келдышем.*

Ключевые слова: *процесс, скорость, уравнение, исследование, метод.*

Tarabayeva I.V. The mathematical modeling of speed distribution of quick-sand material particles during mixing in limited area. *The results of investigations of speed distribution process of quick-sand material particles during its mixing in limited size equipment by mathematical modeling method are considered. The base of mathematical model consists of particular differences equations, which attracts the physics of process. The problem is solved by ending differences method with M.V. Keldysh modification.*

Key words: *process, speed, equation, investigation, method.*

Статья поступила в редакцию 12.2.2017
Рекомендована к публикации д-ром тех. наук В.Н. Павлышом