УДК 517.91: 518.1

Анализ устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений на основе линеаризации и мультипликативных преобразований разностных схем

С.Г. Буланов, А.А. Илюхин
Таганрогский институт имени А. П. Чехова
bulanovtgpi@mail.ru

Буланов С.Г., Илюхин А.А. Анализ устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений на основе линеаризации и мультипликативных преобразований разностных схем. *Предложен подход к анализу устойчивости нелинейной системы ОДУ на основе линеаризации в окрестности исследуемого решения. На данной основе и с помощью мультипликативных преобразований разностных схем конструируется схема численного компьютерного анализа устойчивости нелинейных систем. Компьютерная реализация схемы позволяет однозначно определить характер устойчивости, асимптотической устойчивости либо неустойчивости систем нелинейных ОДУ без представления решения в аналитической форме. Дана разновидность схемы с использованием аналитического решения. Приводятся коды программ и результаты численного эксперимента.*

Ключевые слова: *Компьютерное моделирование устойчивости; разностные решения дифференциальных уравнений; устойчивость по Ляпунову.*

Введение

Анализ устойчивости по Ляпунову требуется выполнять во многих актуальных областях науки и техники. Разработанный во всех теоретических деталях, такой анализ сохраняет принципиальные сложности на практике. Зачастую анализ устойчивости требуется выполнять для систем большой размерности в режиме реального времени, что невозможно без использования вычислительной техники. Поэтому актуальна задача построения компьютерных схем анализа устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Значимым направлением исследования является разработка методов сведения нелинейной системы ОДУ к линейной системе «близкой к исходной». Целесообразность данного преобразования обусловлена тем, что для систем линейных ОДУ существуют методы анализа устойчивости, которые допускают компьютерную реализацию [1, 2]. Поэтому, если возможно выполнить приближение нелинейной системы ОДУ линейной системой в некоторых ограничениях, то по мере ограничений соответственно компьютеризируется анализ устойчивости нелинейных систем ОДУ.

Рассматривается подход к анализу устойчивости нелинейной системы ОДУ на основе линеаризации, которая имеет место только в окрестности исследуемого решения. В рамках данного подхода конструируется схема численного компьютерного анализа устойчивости нелинейных систем, приводятся коды программ, результаты численного эксперимента.

Рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t,Y),\ Y(t_0) = Y_0, \tag{1}$$

где $F(t,Y) = (f_1(t,Y), \ldots, f_n(t,Y))$, $Y = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, $Y_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0n})$. Предполагается, что существует $\delta_0 > 0$, при котором все условия существования и единственности выполнены для невозмущенного решения на полупрямой $[t_0, \infty)$ и для каждого его возмущения $Y = \tilde{Y}(t)$, $Y(t_0) = \tilde{Y}_0$, с начальным вектором из окрестности $\left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \delta_0$. Здесь и ниже рассматриваются канонические согласованные нормы матрицы и вектора. Предполагается также, что в области $R_0 : \left\{ t_0 \le t < \infty;\ Y(t), \forall \tilde{Y}(t) : \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \delta_0 \right\}$ функция $F(t,Y)$ всюду определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t (в точке t_0 – справа), компоненты этой функции удовлетворяют условию Липшица:

$$\left\| F(t,Y) - F(t,\tilde{Y}) \right\| \le L \left\| Y - \tilde{Y} \right\|, \qquad (2)$$

$L = \text{const}\ \forall\, Y \in R_0 \wedge \forall\, \tilde{Y} \in R_0$.

В данных предположениях исследуется устойчивость невозмущенного решения задачи (1). Определение устойчивости [2] упрощено в принятых ограничениях: решение $Y = Y(t)$ устойчиво, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется Δ, $0 < \Delta \le \delta_0$, такое, что $\left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \Delta$ влечет $\left\| \tilde{Y}(t) - Y(t) \right\| \le \varepsilon$ $\forall t \in [t_0, \infty)$. Решение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и найдется Δ_0, $0 < \Delta_0 \le \Delta$, такое, что $\left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \Delta_0$ влечет $\tilde{Y}(t) - Y(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Описание метода

Выполняется следующее преобразование системы (1):

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{f_k(t, y_1, \dots, y_n)}{y_k} y_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

в предположении $y_k \ne 0$, или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dt} \\ \dfrac{dy_2}{dt} \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{f_1(t, y_1, \dots, y_n)}{y_1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dfrac{f_n(t, y_1, \dots, y_n)}{y_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Будем анализировать устойчивость решения $y_1(t)$, …, $y_n(t)$ системы (1), сопоставляя анализ с устойчивостью системы (3).

Если каждую диагональную компоненту в матрице из (3) заменить на аналитическое выражение от t в явной форме, то получим для анализа устойчивости линейную систему, поскольку матрица от $y_1(t)$, …, $y_n(t)$ не будет зависеть. Это дает возможность на практике использовать аппарат анализа устойчивости систем линейных ОДУ для каждого отдельного решения нелинейной системы (1). Преобразованную такой подстановкой систему (3) можно рассматривать как линейную систему вида

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \qquad (4)$$

где диагональные элементы зависят только от переменной t.

Для анализа устойчивости системы (4) ранее получены критерии [2]:

Решение устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\left\| \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \le c = \text{const}\ \forall t \in [t_0, \infty). \qquad (5)$$

Решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено (5) и, кроме того, при $t \to \infty$ выполняется соотношение

$$\left\| \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \to 0. \qquad (6)$$

В (5), (6) E – единичная матрица, $n \times n$, h – шаг разностного метода Эйлера.

Излагаемая ниже идея заключается в том, что точное аналитическое решение в (3) можно заменить на разностное. В результате исследование устойчивости решения системы (3) сводится к анализу устойчивости линейной системы (4) с соответственно дискретизированными значениями правой части и решения на диагонали.

Тем самым исследование устойчивости сводится к компьютерному анализу устойчивости линейных систем на основе критериев (5), (6).

Полученные оценки устойчивости будут сравниваться с результатами анализа устойчивости на основе следующего критерия [3]: в рассматриваемых условиях для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно существование Δ_1, $0 < \Delta_1 \le \delta_0$, такого, что для всех решений $Y = Y(t)$, $Y(t_0) = \tilde{Y}_0$ при ограничении $0 < \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \Delta_1$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| \le \tilde{c}_1, \qquad (7)$$

$\tilde{c}_1 = \text{const}$, $\forall t \in [t_0, \infty)$, $k = 1, \dots, n$.

Для асимптотической устойчивости в тех же условиях необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (7) и существовало $\Delta_2 \le \Delta_1$, такое, что неравенство $0 < \left\| \tilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \Delta_2$ влечет

$$\lim_{t \to \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| = 0, \quad k = 1, \dots, n. \qquad (8)$$

Компьютерная реализация (7), (8) выполняется заменой аналитического решения и возмущения на приближенные значения решения, которые находятся на основе разностного метода [4].

Таким образом, требуется заменить $\dfrac{f_k(t, y_1, \dots, y_n)}{y_k}$ при всех k в (3) на разностное приближение и сопоставить результаты компьютерного анализа устойчивости решения системы (1) на основе (7), (8) с результатами компьютерного анализа устойчивости системы (3) в форме (4) на основе (5), (6) после указанной замены.

В таком переходе всегда есть то преимущество, что для линейной системы все решения устойчивы, если устойчиво любое одно решение, и обратно [5]. Так что можно брать решение не обязательно с теми начальными данными, которые даны в (1).

Конкретно, если приближенное решение (1) вычисляется по методу Эйлера

$$y_{k(i+1)} = y_{k(i)} + h f_k(t, y_{1(i)}, \ldots, y_{n(i)}),\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

то на i-м шаге матрица (4) для (3) примет вид:

$$A(t_i) \approx \begin{pmatrix} \dfrac{f_1(t_i, y_{1i}, \ldots, y_{ni})}{y_{1i}} & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \dfrac{f_n(t_i, y_{1i}, \ldots, y_{ni})}{y_{ni}} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В таком виде эти матрицы после умножения на h и сложения с E перемножаются согласно критериям (5), (6).

Левая часть (7), (8) преобразуется в этом случае аналогично и неравенство (7) проверяется в виде:

$$\left| \frac{\tilde{y}_{ki}(t_i) - y_{ki}(t_i)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| \le \tilde{c}_1,$$

а соотношение (8) – в виде:

$$\lim_{t_i \to \infty} \left| \frac{\tilde{y}_{ki}(t_i) - y_{ki}(t_i)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| = 0$$

для $k = 1, 2, \ldots, n$.

Численный и программный эксперимент

Пусть численный эксперимент по анализу устойчивости системы (1) с использованием преобразования исследуемого решения к матричному виду (9) выполняется на основе (5), (6).

Программа, реализующая данный вариант анализа для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 0.5 y_1 \dfrac{1}{\sqrt{t^3}} - \dfrac{1}{t^2} y_1 y_2^2 \left(\sum_{\ell=0}^{3} t^{\ell} \sum_{\ell=0}^{3} y_2^{2\ell} \right), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_2 \dfrac{1}{\sqrt{t^3}},\ y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

приводится непосредственно ниже [6]. Исследуется на устойчивость нулевое решение этой системы. Исследование выполняется на промежутке $[0.5, 10000]$ с шагом $h = 0.00001$. Представление (9) требует ограничения для всех номеров уравнений $y_k \ne 0$ Предложенный подход при данном ограничении не позволяет напрямую исследовать нулевое решение, поэтому выполняется исследование некоторого его достаточно малого возмущения: y0: array[1..n] of extended=(0.000001, 0.000001); y1:= y01; y2:= y02.

Программа имеет вид:

```
program lin_kriteriy;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
  SysUtils;
const
   h=0.00001;  n=2;
y0 : array[1..n] of extended=(0.000001,
0.000001);
type
matr=array[1..n,1..n] of extended;
stolb=array[1..n] of extended;
var
   A, B, C : matr;  i, j, l : integer;
   y1, y2, y11, t0, t, s, norma : extended;
  k : longint; s01 : array[1..n] of extended;
function f1(t, y1, y2 : extended) : extended;
begin
   f1:=(0.5*y1/sqrt(t*sqr(t)))-
((y1*sqr(y2)/sqr(t))*(1+t+sqr(t)+t*sqr(t))*
(1+sqr(y2)+sqr(y2)*sqr(y2)+ sqr(y2)*sqr(y2)*
sqr(y2)));
end;
function f2(t, y1, y2 : extended) : extended;
begin  f2:=y2/sqrt(t*sqr(t));  end;
begin
t:=0.5; k:=50000; y1:=y0[1]; y2:=y0[2];
for i:=1 to n do  for j:=1 to n do
begin
a[1,2]:=0; a[2,1]:=0;
a[1,1]:=1+(h*f1(t, y1, y2)/y1);
a[2,2]:=1+(h*f2(t, y1, y2)/y2);
end;
repeat
   y11:=y1;
   y1:=y1+h*f1(t, y1, y2);
   y2:=y2+h*f2(t, y11, y2);
k:=k+1;  t:=t+h;
if (y1<>0) and (y2<>0) then
begin
for i:=1 to n do  for j:=1 to n do
begin
b[1,1]:=1+(h*f1(t, y1, y2)/y1);
b[2,2]:=1+(h*f2(t, y1, y2)/y2);
b[1,2]:=0; b[2,1]:=0;
end; end;
for i:=1 to n do  for j:=1 to n do
begin
s:=0;
for l:=1 to n do
s:=s+a[i,l]*b[l,j];
c[i,j]:=s;
end;
for i:=1 to n do  for j:=1 to n do
a[i,j]:=c[i,j];
if k>=100000000 then
begin
writeln('t=',t);
for i:=1 to n do
begin
s01[i]:=0;
for j:=1 to n do
s01[i]:=s01[i]+abs(a[i,j]);
end;
   norma:=s01[1];
for i:=2 to n do
if s01[i]>norma then norma:=s01[i];
writeln('norma=',norma);k:=0;
end;
until t>10000; readln;
end.
```

Результат работы программы:

Таблица 1. Значения нормы по критериям (5), (6) для системы (10).

t	$norma\,1$	$norma\,2$
1000	15.88198	15.88198
2000	16.17893	16.17893
3000	16.31225	16.31225
4000	16.39224	16.39224
5000	16.44706	16.44706
6000	16.48764	16.48764
7000	16.51925	16.51925
8000	16.54477	16.54477
9000	16.56595	16.56595
10000	16.58388	16.58388

Значения нормы при обоих значениях возмущения ограничены константой $c=17$, что в соответствии с критерием (5) свидетельствует об устойчивости.

Первоначально величина начального возмущения выбирается равной 0.001, результаты эксперимента отображены во втором столбце таблицы 1 (значения нормы по критерию 5). Далее величина начального возмущения уменьшается до 0.000001 и вновь выполняется анализ устойчивости (третий столбец таблицы 1).

Ниже исследование характера устойчивости нулевого решения заменяется исследованием малых возмущений нулевого решения. При этом предполагается, что нулевое решение попадает в окрестность этого возмущения. Следовательно анализ устойчивости нулевого решения эквивалентен анализу устойчивости сколь угодно мало возмущенных решений из его окрестности.

Согласно данному замечанию ограниченность константой малых возмущений означает ограниченность возмущений в окрестности нуля, т.е. точки покоя.

Для анализа нулевого решения критерии (7), (8) примут вид:

$$\left|\frac{\tilde{y}_k(t)}{\tilde{y}_{k0}}\right| \le \tilde{c}_1,\ \tilde{c}_1 = \text{const},\ \forall t \in [t_0, \infty),\ k=1,\dots,n. \quad (11)$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde{y}_k(t)}{\tilde{y}_{k0}}\right| = 0,\ k=1,\dots,n. \quad (12)$$

Критерии (11), (12) используют непосредственно возмущенное решение, поэтому оговорка $y_k \ne 0$ специально для этих критериев не требуется. Их можно непосредственно применить к рассматриваемой системе.

Соответствующая программа примет вид:

```
program nelin_kriteriy;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
  SysUtils;
const
   TT=10000; h =0.00001;
   eps1=0.000001;  eps2=0.000001;
var
   t, norma, y1, y2, yv1, yv2, y11, yv11 :
extended;  k: longint;
   delta1, delta2, deltay1, deltay2, y01,
y02, yv01, yv02 : extended;
function f1(t, y1, y2 : extended) : extended;
begin
    f1:=(0.5*y1/sqrt(t*sqr(t)))-(
(y1*sqr(y2)/sqr(t))*(1+t+sqr(t)+t*sqr(t))*(1+
sqr(y2)+sqr(y2)*sqr(y2)+ sqr(y2)*sqr(y2)*
sqr(y2) )  );
end;
function f2(t, y1, y2 : extended) : extended;
begin f2:=y2/sqrt(t*sqr(t)); end;
begin
   y01:=0;  y02:=0;
   yv01:=y01+eps1; yv02:=y02+eps2;
   t:=0.5; k:=0; y1:=y01; y2:=y02;
   yv1:=yv01; yv2:=yv02;
   delta1:=yv01-y01;  delta2:=yv02-y02;
repeat
   y11:=y1;  yv11:=yv1;
   y1:=y1+h*f1(t, y1, y2);
   y2:=y2+h*f2(t, y11, y2);
   yv1:=yv1+h*f1(t, yv1, yv2);
   yv2:=yv2+h*f2(t, yv11, yv2);
   deltay1:=(yv1-y1)/delta1;
   deltay2:=(yv2-y2)/delta2;
   norma:=sqrt(sqr(deltay1)+sqr(deltay2));
   k:=k+1; t:=t+h;
   if k>=10000000 then
begin
writeln('t=',t:6:1,' ','norma=',norma); k:=0;
writeln('y1=',y1,'        ','yv1=',yv1);
writeln('y2=',y2,'        ','yv2=',yv2);
end;
until t>=TT; readln;
end.
```

Результат работы программы дан в табл. 2, где значение переменной $norma\,3$ определяется из равенства $norma\,3 = \max\limits_{1\le k\le n}\left\{\left|\frac{\tilde{y}_{ki}(t_i)}{\tilde{y}_{k0}}\right|\right\}$ при соответствующей начальной величине возмущения 0.001. Переменная $norma\,4$ определяется аналогично для начальной величины возмущения 0.000001.

Таблица 2. Значения нормы по критериям (11), (12) для системы (10).

t	$norma\,3$	$norma\,4$
1000	15.88198	16.37424
2000	16.17893	16.67094
3000	16.31225	16.80368
4000	16.39224	16.88280
5000	16.44706	16.93647
6000	16.48764	16.97563
7000	16.51925	17.00555
8000	16.54477	17.02913
9000	16.56595	17.04809

10000	16.58388	17.06355

Значения нормы на достаточно большом промежутке ограничены константой $c = 17$, что соответствует устойчивости.

Результаты численного анализа устойчивости по обоим рассмотренным критериям эквивалентны и совпадают с аналитической оценкой устойчивости исследуемой системы, представленной в [4, 6].

В примере ниже исследуется на устойчивость точка покоя нелинейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 0.5\, y_1 \dfrac{1}{\sqrt{t}} + \dfrac{1}{t^2}\, y_1 y_2^2 \left(\sum\limits_{\ell=0}^{3} t^{\ell} \sum\limits_{\ell=0}^{3} v_2^{2\ell} \right), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -t,\ y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Используются те же программы: lin_kriteriy, nelin_kriteriy применительно к системе (13). При исследовании данной системы на промежутке $[0.5, 2.5]$ по критериям (5), (6) (табл. 3) и по критериям (11), (12) (табл. 4) наблюдается резкий рост значений нормы, что соответствует неустойчивости.

Таблица 3. Значения нормы по критериям (5), (6) для системы (13).

t	*norma* 1	*norma* 2
0,7	1.19E+0002	1.20E+0005
0,9	2.79E+0002	2.80E+0005
1,1	4.79E+0002	4.80E+0005
1,3	7.19E+0002	7.20E+0005
1,5	9.99E+0002	1.00E+0006
1,7	1.58E+0004	1.32E+0006
1,9	3.28E+0019	4.01E+0019
2,1	1.01E+0095	2.38E+0095
2,3	2.90E+0432	7.96E+0433
2,5	7.27E+1735	4.03E+1740

Таблица 4. Значения нормы по критериям (11), (12) для системы (13).

t	*norma* 3	*norma* 4
0,7	1.51E+0000	1.51E+0000
0,9	1.66E+0000	1.66E+0000
1,1	1.95E+0000	1.96E+0000
1,3	2.99E+0000	3.00E+0000
1,5	1.42E+0001	1.43E+0001
1,7	1.58E+0004	1.65E+0004
1,9	3.27E+0019	3.99E+0019
2,1	9.95E+0094	2.34E+0095
2,3	2.69E+0432	7.40E+0433
2,5	5.59E+1735	3.10E+1740

Результаты численного анализа устойчивости по обоим критериям эквивалентны, кроме того, они совпадают с аналитической оценкой устойчивости исследуемой системы, представленной в [4, 6].

Далее рассматривается система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -0.5\, y_1 \dfrac{1}{\sqrt{t}} - \dfrac{1}{t^2} \left(\sum\limits_{\ell=0}^{3} t^{\ell} \sum\limits_{\ell=0}^{3} v_r^{2\ell} \right) \dfrac{y_1^3}{y_2^2 + 1}, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_2 \dfrac{1}{\sqrt{t}},\ y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Исследуется на устойчивость точка покоя системы (14). При исследовании системы на промежутке $[0.5, 1500]$ по критериям (5), (6) (табл. 5) и по критериям (11), (12) (табл. 6) наблюдается монотонное убывание значений нормы, что соответствует асимптотической устойчивости.

Таблица 5. Значения нормы по критериям (5), (6) для системы (14).

t	*norma* 1	*norma* 2
150	9.72E-0006	9.72E-0006
300	6.09E-0008	6.09E-0008
450	1.24E-0009	1.24E-0009
600	4.66E-0011	4.66E-0011
750	2.59E-0012	2.59E-0012
900	1.89E-0013	1.89E-0013
1050	1.71E-0014	1.71E-0014
1200	1.83E-0015	1.83E-0015
1350	2.23E-0016	2.23E-0016
1500	3.06E-0017	3.06E-0017

Таблица 6. Значения нормы по критериям (11), (12) для системы (14).

t	*norma* 3	*norma* 4
150	9.72E-0006	9.72E-0006
300	6.09E-0008	6.09E-0008
450	1.24E-0009	1.24E-0009
600	4.66E-0011	4.66E-0011
750	2.59E-0012	2.59E-0012
900	1.89E-0013	1.89E-0013
1050	1.71E-0014	1.71E-0014
1200	1.83E-0015	1.83E-0015
1350	2.23E-0016	2.23E-0016
1500	3.06E-0017	3.06E-0017

Таким образом, результаты численного анализа по обоим рассмотренным критериям эквивалентны, и, кроме того, они совпадают с аналитической оценкой устойчивости точки покоя исследуемой системы, представленной в [4, 6].

Далее, анализируется на устойчивость следующая система уравнений [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y_1}{d\,t} = \dfrac{y_1}{t} - t^2 y_1 y_2^{\,2}, \\ \dfrac{d\,y_2}{d\,t} = -\dfrac{y_2}{t} \quad (t \ge 1). \end{cases} \tag{15}$$

При исследовании системы с помощью тех же программ на промежутке $[1, 1500]$ по критериям (5), (6) (табл. 7), (11), (12) (табл. 8) наблюдается монотонный рост значений нормы, что является признаком неустойчивости.

Таблица 7. Значения нормы по критериям (5), (6) для системы (15).

t	$norma\,1$	$norma\,2$
150	1.49E+0002	1.50E+0002
300	2.99E+0002	3.00E+0002
450	4.49E+0002	4.50E+0002
600	5.99E+0002	6.00E+0002
750	7.49E+0002	7.50E+0002
900	8.99E+0002	9.00E+0002
1050	1.04E+0003	1.05E+0003
1200	1.19E+0003	1.20E+0003
1350	1.34E+0003	1.35E+0003
1500	1.49E+0003	1.50E+0003

Таблица 8. Значения нормы по критериям (11), (12) для системы (15).

t	$norma\,3$	$norma\,4$
150	1.49E+0002	1.50E+0002
300	2.99E+0002	2.99E+0002
450	4.49E+0002	4.49E+0002
600	5.99E+0002	5.99E+0002
750	7.49E+0002	7.49E+0002
900	8.99E+0002	8.99E+0002
1050	1.04E+0003	1.04E+0003
1200	1.19E+0003	1.19E+0003
1350	1.34E+0003	1.34E+0003
1500	1.49E+0003	1.49E+0003

Общее решение данной системы имеет вид [5]

$$\begin{cases} y_1 = c_1 t\, e^{-c_2^2 t}, \\ y_2 = \dfrac{c_2}{t}. \end{cases}, \quad \begin{cases} c_1 = \dfrac{y_{10}}{t_0} e^{t_0^3 y_{20}^2}, \\ c_2 = t_0 y_{20} \quad (t_0 \ge 1). \end{cases}$$

Отсюда нулевое решение системы неустойчиво справа [4], что совпадает с приведенными выше результатами численного компьютерного анализа.

В случае, если известно аналитическое решение системы (1), то этим аналитическим выражением целесообразно заменить разностные приближения решений в матрице из системы (3). Соответственно упрощается конструкция программы lin_kriteriy: нет необходимости приближенного вычисления решения и правой части системы на каждом шаге работы программы, диагональные элементы матрицы из (9) становятся известными функция от переменной t.

В итоге код программы lin_kriteriy преобразуется к виду:

```
program lin_kriteriy_reschur;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
  SysUtils;
const
   h=0.00001; n=2;
type
matr=array[1..n,1..n] of extended;
stolb=array[1..n] of extended;
var
   A, B, C : matr;
   t0, t, s, norma : extended;
   i, j, l : integer; k, k0 : longint;
   s01 : array[1..n] of extended;
function y1(t : extended) : extended;
begin  y1:=t*exp(-t);  end;
function y2(t : extended) : extended;
begin  y2:=1/t;  end;
function f1(t : extended) : extended;
begin
f1:=(y1(t)/t)-(sqr(t)*y1(t)*sqr(y2(t)));
end;
function f2(t : extended) : extended;
begin  f2:=-y2(t)/t;  end;
begin
   t:=1; k:=100000;
if (y1(t)<>0) and (y2(t)<>0) then
begin
for i:=1 to n do for j:=1 to n do
begin
a[1,2]:=0; a[2,1]:=0;
a[1,1]:=1+(h*f1(t)/y1(t));
a[2,2]:=1+(h*f2(t)/y2(t));
end; end;
repeat
k:=k+1;  t:=t+h;
if (y1(t)<>0) and (y2(t)<>0) then
begin
for i:=1 to n do for j:=1 to n do
begin
b[1,1]:=1+(h*f1(t)/y1(t));
b[2,2]:=1+(h*f2(t)/y2(t));
b[1,2]:=0; b[2,1]:=0;
end; end;
for i:=1 to n do for j:=1 to n do
begin
s:=0;
for l:=1 to n do s:=s+a[i,l]*b[l,j];
c[i,j]:=s;
end;
for i:=1 to n do for j:=1 to n do
a[i,j]:=c[i,j];
if k>=15000000 then
   begin writeln('t=',t:5:3);
for i:=1 to n do
begin
s01[i]:=0;
for j:=1 to n do s01[i]:=s01[i]+abs(a[i,j]);
end;
norma:=s01[1];
for i:=2 to n do
if s01[i]>norma then norma:=s01[i];
writeln('norma=',norma); k:=0;
end;
until t>1500; readln;
end.
```

В табл. 9 представлены результаты исследования устойчивости системы (15) при ненулевых начальных условиях ($y_{01} = 1/e,\ y_{02} = 1$) по критериям (5), (6) с помощью программы lin_kriteriy_reschur (второй столбец табл. 9) и по критериям (7), (8) с помощью программы nelin_kriteriy (третий столбец табл. 9).

Таблица 9. Значения нормы по критериям (5)-(8) для системы (15).

t	*norma* 5	*norma* 6
150	6.66E-0003	6.66E-0003
300	3.33E-0003	3.33E-0003
450	2.22E-0003	2.22E-0003
600	1.66E-0003	1.66E-0003
750	1.33E-0003	1.33E-0003
900	1.11E-0003	1.11E-0003
1050	9.52E-0004	9.52E-0004
1200	8.33E-0004	8.33E-0004
1350	7.40E-0004	7.40E-0004
1500	6.66E-0004	6.66E-0004

Результаты анализа устойчивости эквивалентны и соответствуют асимптотической устойчивости решения системы (15).

Конструкция программы lin_kriteriy может быть усовершенствована. Так как ненулевые элементы в перемножаемых матрицах находятся на главной диагонали, то вместо умножения матриц достаточно перемножать лишь их диагональные элементы при соответственных значениях переменной t. Таким образом будет сформировано n произведений, где n размерность матрицы (9):

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{i\to\infty}\prod\limits_{\ell=0}^{i}\left(1+h\dfrac{f_1(t_{i-\ell}, y_{1i-\ell},\dots,y_{ni-\ell})}{y_{1i-\ell}}\right) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 \ \dots & \lim\limits_{i\to\infty}\prod\limits_{\ell=0}^{i}\left(1+h\dfrac{f_n(t_{i-\ell}, y_{1i-\ell},\dots,y_{ni-\ell})}{y_{ni-\ell}}\right) & \end{pmatrix}$$

Максимальное значение модуля этих произведений будет соответствовать значению нормы матрицы и, тем самым, оно будет идентифицировать характер устойчивости согласно критерию (5), (6).

Код реализующей эту модификацию программы имеет вид:

```
program lin_kriteriy_vektor;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
  SysUtils;
const
   h=0.00001; n=2;
 y0 : array[1..n] of extended=(0.001, 0.001);
var
   y1, y2, y11, t0, t, s, norma, p1, p2 :
extended;
   i, j, l : integer; k, k0 : longint;
   s01 : array[1..n] of extended;
function f1(t, y1, y2 : extended) : extended;
begin f1:=(y1/t)-(sqr(t)*y1*sqr(y2)); end;
function f2(t, y1, y2 : extended) : extended;
begin f2:=-y2/t; end;
begin
t:=1; k:=100000; y1:=y0[1]; y2:=y0[2];
if (y1<>0) and (y2<>0) then
begin
   p1:=(1+(h*f1(t, y1, y2)/y1));
   p2:=(1+(h*f2(t, y1, y2)/y2));
end;
repeat
   y11:=y1;
   y1:=y1+h*f1(t, y1, y2);
   y2:=y2+h*f2(t, y11, y2);
   k:=k+1;  t:=t+h;
if (y1<>0) and (y2<>0) then
begin
   p1:=p1*(1+(h*f1(t, y1, y2)/y1));
   p2:=p2*(1+(h*f2(t, y1, y2)/y2));
end;
   if k>=15000000 then
begin
writeln('t=',t:5:3);
if abs(p1)>abs(p2) then norma:=abs(p1) else
norma:=abs(p2);
writeln('norma=',norma); k:=0;
end;
until t>1500; readln;
end.
```

Данная программа выполняет повторный анализ устойчивости системы (15) на основе критериев (5), (6) (второй столбец табл. 10). В таблице для наглядности воспроизводится предыдущий результат на основе критериев (11), (12) (третий столбец табл. 10).

Таблица 10. Значения нормы по критериям (5), (6), (11), (12) для системы (15).

t	*norma* 7	*norma* 8
150	1.49E+0002	1.50E+0002
300	2.99E+0002	3.00E+0002
450	4.49E+0002	4.50E+0002
600	5.99E+0002	6.00E+0002
750	7.49E+0002	7.50E+0002
900	8.99E+0002	9.00E+0002
1050	1.04E+0003	1.05E+0003
1200	1.19E+0003	1.20E+0003
1350	1.34E+0003	1.35E+0003
1500	1.49E+0003	1.50E+0003

Результаты тождественны представленным в таблице 7, что подтверждает ранее установленный характер устойчивости системы. При этом время работы программы значительно сокращается, так как процесс перемножения матриц заменяется перемножением соответствующих диагональных элементов.

Заключение

Представлена схема анализа устойчивости систем нелинейных ОДУ на основе линеаризации, которая связана непосредственно с исследуемым решением. Компьютерная реализация схемы показала целесообразность использования данного подхода на практике. Анализ на основе данной схемы позволяет определить характер устойчивости, асимптотической устойчивости либо неустойчивости систем нелинейных ОДУ без представления решения в аналитической форме, непосредственно по значениям разностных приближений решения и правой части системы. Это влечет возможность компьютерного анализа устойчивости нелинейных систем в режиме реального времени без обращения к аналитическим методам качественной теории дифференциальных уравнений.

Литература

1. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964. 478 с.
2. Ромм Я.Е., Буланов С.Г. Компьютерный анализ устойчивости по Ляпунову систем линейных дифференциальных уравнений. – Таганрог: Изд-во Таганрог. гос. пед. Ин-та имени А.П. Чехова, 2012. – 148 с.
3. Ромм Я.Е. Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных схем решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Известия РАН. Математическое моделирование, 2008, т.20, №12. – С. 105 – 118.
4. Ромм Я.Е. Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – Кибернетика и системный анализ, Киев, 2015, том 51, № 3. – С. 107 – 124.
5. Демидович Д.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука. – 1967. – 472 с.
6. Ромм Я.Е., Буланов С.Г. Численный эксперимент по компьютерному анализу устойчивости линеаризованных систем нелинейных дифференциальных уравнений / Таганрогский институт им. А. П. Чехова – Таганрог. 2016. 18 с. ДЕП в ВИНИТИ 14.07.16, № 102 – В2016.

Буланов С.Г., Илюхин А.А. Анализ устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений на основе линеаризации и мультипликативных преобразований разностных схем. *Предложен подход к анализу устойчивости нелинейной системы ОДУ на основе линеаризации в окрестности исследуемого решения. На данной основе и с помощью мультипликативных преобразований разностных схем конструируется схема численного компьютерного анализа устойчивости нелинейных систем. Компьютерная реализация схемы позволяет однозначно определить характер устойчивости, асимптотической устойчивости либо неустойчивости систем нелинейных ОДУ без представления решения в аналитической форме. Дана разновидность схемы с использованием аналитического решения. Приводятся коды программ и результаты численного эксперимента.*

Ключевые слова: *Компьютерное моделирование устойчивости; разностные решения дифференциальных уравнений; устойчивость по Ляпунову.*

Bulanov S.G., Ilyuhin A.A. The stability analysis of nonlinear differential equations systems based on linearization and multiplicative transformations of difference schemes. *It is proposed approach to the stability analysis of nonlinear system of ordinary differential equation (ODE) on the basis of linearization in the neighborhood of the studied solutions. On this basis, and using multiplicative transformations of difference schemes the method of the numerical computer analysis of stability of nonlinear systems is constructed. Computer implementation of the scheme allows to unambiguously determine the nature of stability, asymptotic stability or instability of nonlinear systems of ODE without presenting the solution in an analytical form. A variation of scheme which uses analytical solutions is given. The codes and results of the numerical experiment are presented.*

Keywords: Computer simulation of stability; differential solutions differential equations; Lyapunov stability.

Статья поступила в редакцию 25.5.2017
Рекомендована к публикации д-ром физ.-мат.. наук А.С. Миненко