

Три задачи по геометрии на тему: «Разделение треугольника на части с заданными свойствами»

В. А. Свентковский

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, г. Москва
vladimirsventkovskiy@gmail

Свентковский В. А. Три задачи по геометрии на тему: «Разделение треугольника на части с заданными свойствами». Приводится доказательство того, что треугольник с рациональными сторонами можно разбить на 2 треугольника с рациональными сторонами неограниченным числом способов. Строится соответствующий алгоритм. Дается четкий алгоритм разделения треугольника на 9 выпуклых пятиугольников. Доказывается, что тупоугольный или прямоугольный треугольник разделяется на остроугольные треугольники. Строится соответствующий алгоритм.

Ключевые слова: треугольник, пятиугольник, части, рациональные стороны, заданные свойства.

Введение

Доказывается, что на границе треугольника с рациональными сторонами найдется неограниченное число точек, все три расстояния от которых до вершин также рациональны. Аналогичный вопрос для точек внутри треугольника с рациональными сторонами остался пока для автора открытым. На этот вопрос может пролить свет компьютерный эксперимент в дальнейшем.

Существует, как известно, три типа треугольников, в зависимости от их углов: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные.

Автор ставит естественный вопрос, (который средней школой не рассматривается) – можно ли треугольник любого из перечисленных трех типов разделить на треугольники любого из этих трех типов?

Очевидно, любой треугольник проведением высоты из большего угла делится на 2 прямоугольных треугольника.

Ясно также, что проведением трех средних линий любой треугольник делится на 4 подобных, равных треугольника того же типа.

Ясно также, что любой треугольник делится на три тупоугольных треугольника, при соединении точки пересечения его биссектрис с вершинами треугольника.

Остался не рассмотренным уже не столь простой вопрос о разделении тупоугольного или прямоугольного треугольника на остроугольные треугольники. Положительный ответ на него доказывается в теореме 2.

Причем это доказательство доступно для продвинутого школьника.

Далее, если поставить вопрос, на какие выпуклые k -угольники можно разбить

треугольник, то для $k=3$ найти решение может любой школьник.

Для $k=4$ – не любой, а для $k=5$ лишь некоторые. Четкий алгоритм автора (теорема 3), позволяет большинству школьников (да и взрослых) научиться быстро решать задачу для $k=5$. Для $K>5$ не удалось найти в литературе рассмотрения этого вопроса (или хотя бы упоминания), хотя сам вопрос естественно приходил в голову разным математикам. Отсюда автор делает вывод, что, наверное, этот вопрос пока не получил ответа. Хотя, возможно, при $K>5$ треугольник и нельзя разрезать на выпуклые K -угольники.

Теорема 1

Любой треугольник с рациональными сторонами можно разбить на два треугольника с рациональными сторонами.

Доказательство

Доказательство основано на том факте, что любое рациональное положительное число может быть представлено как разность квадратов двух различных рациональных чисел. Этот факт ниже доказывается.

Пусть задан произвольный треугольник ABC с рациональными сторонами (рис. 1).

Пусть

$$AB=c, BC=a, AC=b, \quad (1)$$

где a, b, c – рациональные числа; BH – высота треугольника ABC ;

AC – большая сторона.

Достаточно доказать, что на стороне AC найдется точка D , такая, что длины отрезков AD , BD – рациональны (так как, если AD – рационально, то

$$DC=AC-AD \quad (2)$$

– тоже рационально).

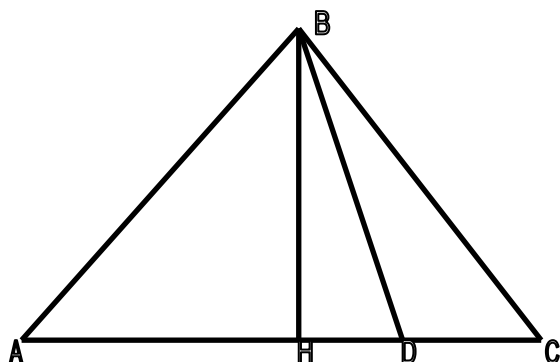


Рисунок 1 – Треугольник с рациональными сторонами

Из теоремы косинусов следует, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (3)$$

Отсюда следует, что косинусы углов A, B, C – рациональны. Поэтому

$$AH = c \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} = R \quad (4)$$

- рационально.

Пусть

$$BD = x, \quad HD = y. \quad (5)$$

Тогда

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = c^2 - R^2 = r \\ r = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \quad (6)$$

Итак,

$$(x+y)(x-y) = r. \quad (7)$$

Пусть

$$x - y = t. \quad (8)$$

Тогда

$$x + y = \frac{r}{t}. \quad (9)$$

Из (8), (9) следует

$$x = \frac{t+r/t}{2}; y = \frac{r/t-t}{2}. \quad (10)$$

Задавая рациональное t , получаем рациональные x, y .

Достаточно найти такое рациональное t , чтобы выполнялись неравенства

$$h < \frac{t+r/t}{2} < a \quad (11)$$

Построим график (рис. 2):

$$x = \frac{t+r/t}{2}. \quad (12)$$

Асимптоты:

$$t = 0; x = t/2. \quad x' = 0.5(1 - r/t^2), \quad (13)$$

$$t_0 = \sqrt{r}. \quad (14)$$

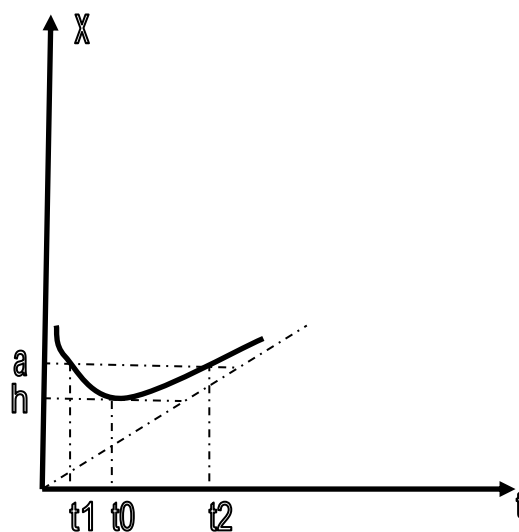


Рисунок 2 – График функции $x = \frac{t+r/t}{2}$

Найдем t_1, t_2 :

$$\frac{t+r/t}{2} = a, \quad (15)$$

$$t^2 - 2at + r = 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4r}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - r}, \quad (16)$$

$$t_1 = a - \sqrt{a^2 - r}, \quad t_2 = a + \sqrt{a^2 - r}. \quad (17)$$

Выбирая любое рациональное число $t \in (t_1, t_0)$, (а таких чисел бесконечное множество), получаем по формулам (10) рациональные x, y . Если точку D искать на отрезке AH, то точке D соответствует число t_1 . Если же точку D искать на отрезке HC, то точке D соответствует число t_2 .

Пусть теперь вершина B проектируется не на сторону AC, а на ее продолжение, то есть угол A или C – тупой (рис. 3).

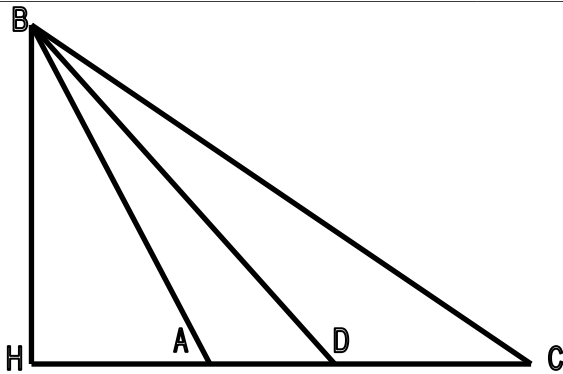


Рисунок 3 – Треугольник с тупыми углами A и C
В этом случае

$$AH = -\cos A \quad (18)$$

- рационально.

Поэтому CH - рационально, а, значит,

$$BH^2 = BC^2 - CH^2 \quad (19)$$

- рационально.

Теперь, если положить

$$BD = x, HD = y, \quad (20)$$

то рассуждения повторяются,

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = c^2 - R^2 = r \quad (21)$$

$$r = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = r$$

Итак,

$$(x + y)(x - y) = r. \quad (22)$$

Пусть

$$x - y = t. \quad (23)$$

Тогда

$$x + y = \frac{r}{t}. \quad (24)$$

Из (23), (24) следует

$$x = \frac{t + r/t}{2}; y = \frac{r/t - t}{2}. \quad (25)$$

Задавая рациональное t , получаем рациональные x, y .

Достаточно найти такое рациональное t , чтобы выполнились неравенства

$$c < \frac{t + r/t}{2} < a. \quad (26)$$

Построим график (рис. 4):

$$x = \frac{t + r/t}{2}. \quad (27)$$

Асимптоты:

$$t = 0; x = t/2. \quad (28)$$

Имеем:

$$x' = 0.5(1 - r/t^2),$$

$$x'' = 0.5\left(\frac{2r}{t^3}\right) = \frac{r}{t^3} > 0. \quad (29)$$

Поэтому график имеет следующий вид:

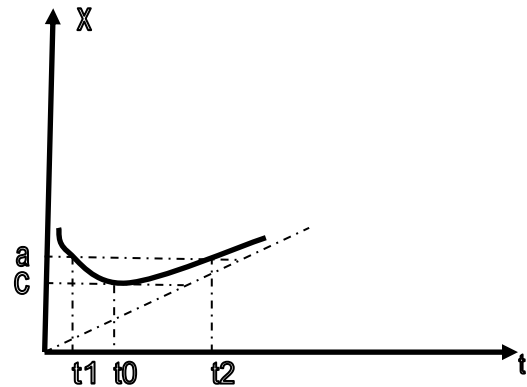


Рисунок 4 – График функции $x = \frac{t + r/t}{2}$

Имеем:

$$t_0 = \sqrt{r}. \quad (30)$$

Найдем t_1, t_2 :

$$\frac{t + r/t}{2} = a; t^2 - 2at + r = 0 \quad (31)$$

$$t_1 = a - \sqrt{a^2 - r}, t_2 = a + \sqrt{a^2 - r}. \quad (32)$$

Выбирая любое рациональное число

$$t \in (t_0, t_2), \quad (33)$$

(а таких чисел бесконечное множество), получаем по формулам (10) рациональные x, y . Если точку D искать на отрезке AH, то точке D соответствует число t_1 . Если же точку D искать на отрезке HC, то точке D соответствует число t_2 .

Теорема 1 доказана.

Выводы

На границе треугольника содержится всюду плотное множество точек, для которых все три расстояния от вершин – рациональные числа. Интересно, есть ли не только на границе, но и внутри любого треугольника с рациональными сторонами, подобное множество троек рациональных расстояний до вершин треугольника? Шансов для этого меньше, поскольку для точек внутри треугольника из условия, что одно расстояние от вершины – рационально, не следует, что оба других расстояний от вершин – рациональны.

Более того, пока неясно, всегда ли внутри любого треугольника с рациональными сторонами найдется хотя бы одна точка с тремя рациональными расстояниями до вершин треугольника. Компьютерный эксперимент должен обнаружить упомянутое всюду плотное множество, если оно существует. Промоделировать ситуацию можно на первом треугольнике с различными минимальными целыми сторонами: 2,4,5.

Теорема 2

Любой равнобедренный тупоугольный или прямоугольный треугольник можно разделить на 7 остроугольных треугольников. Любой неравнобедренный тупоугольный треугольник делится на 14 остроугольных треугольников.

Доказательство

Лемма 1

Равнобедренный тупоугольный или прямоугольный треугольник можно разделить на семь остроугольных треугольников (рис. 5, 6).

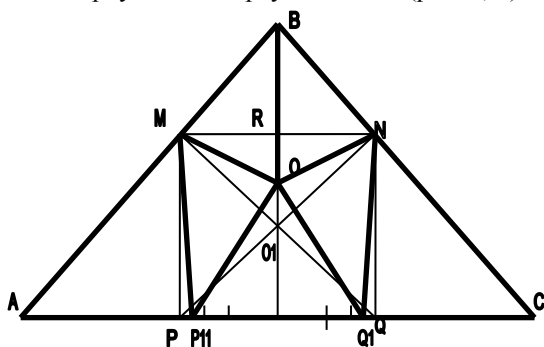


Рисунок 5 – Деление равнобедренного тупоугольного треугольника на семь остроугольных (вариант 1)

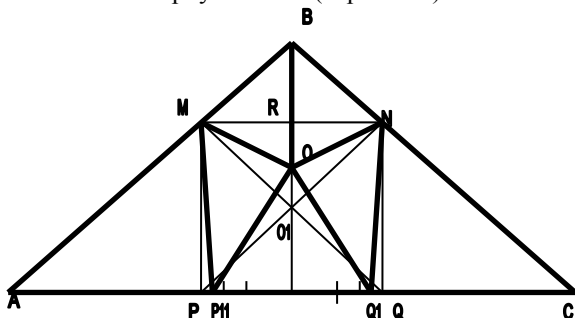


Рисунок 6 – Деление равнобедренного тупоугольного треугольника на семь остроугольных (вариант 2)

Рассмотрим равнобедренный тупоугольный треугольник ABC. Угол B- тупой

$$\angle B > 90^\circ \quad (34)$$

Пусть

$$AC=b, BD=h. \quad (35)$$

Пусть MNPQ- квадрат, вписанный в треугольник ABC. Пусть сторона квадрата MN равна a . Тогда из подобия треугольников следует

$$\frac{a}{b} = \frac{h-a}{h}. \quad (36)$$

Отсюда

$$ah = bh - ab. \quad a = \frac{bh}{b+h}. \quad (37)$$

Отрезок “ a ” строится на основе теоремы Фалеса с помощью отложения отрезков $h, b+h, h$ на сторонах угла и проведения: $SF \parallel VU$ (рис. 7).

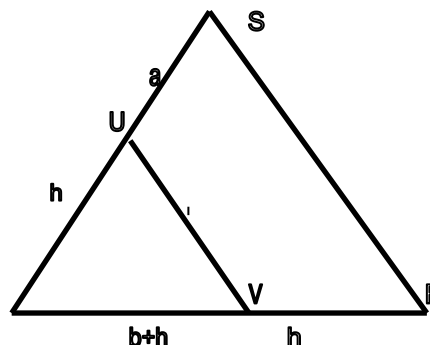


Рисунок 7 – Иллюстрация теоремы Фалеса

Если центр квадрата соединить с его вершинами, то получим 4 равнобедренных прямоугольных треугольника, составляющих квадрат, два прямоугольных треугольника: AMP, CNQ.

Тогда

$$\begin{aligned} \angle MBR &= \frac{\angle B}{2} > \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ, \\ \angle BMR &< 45^\circ, \\ \angle RMO &= \angle MOQ = 45^\circ \end{aligned} \quad (38)$$

В треугольнике O1MB

$$\angle O1MB < 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \quad (39)$$

Треугольник MBO1- остроугольный, треугольник NO1B тоже остроугольный. Возьмем произвольную точку O внутри отрезка RO1, например в его середине. Теперь соединим ее с вершинами квадрата. Тогда пятиугольник MBNPQ разбился на пять треугольников: MBO, NBO, POQ, MOP, QON (рис. 8). Все эти пять треугольников - остроугольные.

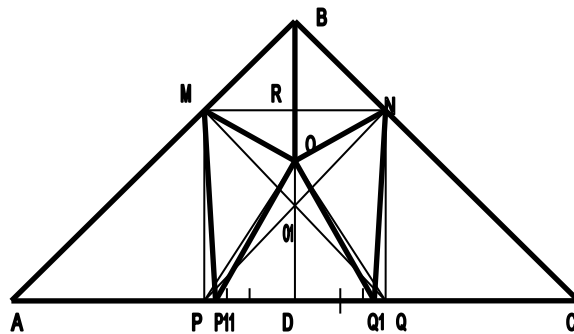


Рисунок 8 – Разбиение пятиугольника MBNPQ на пять треугольников

Осталось еще два прямоугольных треугольника: AMP, CNQ. Их можно превратить в остроугольные, “чуть” сместив вершины Q и P в сторону вершины D.

При этом остроугольные треугольники немного деформируются, но останутся остроугольными по непрерывности при достаточно малом смещении.

Докажем это.

Пусть

$$QQ_1 = PP_1 = ka \quad (40)$$

Нужно показать, что углы MQ_1O , MOQ_1 -острые, при достаточно малом положительном k .

Пусть

$$k = 1/16 = 0.125/2 = 0.0625. \quad (41)$$

Применим теорему косинусов.

$$c_1^2 = a^2 + (0.0625a)^2 = 1 \frac{1}{256} a^2; \quad (42)$$

$$MO^2 = (a/2)^2 + (a/4)^2 = \frac{5}{16} a^2$$

$$OP_1^2 = (a/2 - a/16)^2 + (a - a/4)^2 =$$

$$= (7a/16)^2 + (3a/4)^2 =$$

$$= (49/256 + 9/16) a^2 =$$

$$= \frac{49+144}{256} a^2 = \frac{193}{256} a^2 \quad (43)$$

$$MP_1^2 = a^2 + (0.0625a)^2 =$$

$$= 1 \frac{1}{256} a^2 \quad (44)$$

Отсюда

$$OM < OP_1 < MP_1. \quad (45)$$

Наибольший угол против большей стороны MQ_1 – это угол MOQ_1 .

$$\cos \angle MOP_1 = \frac{MO^2 + OP_1^2 - MP_1^2}{2MO \cdot OP_1} =$$

$$= \frac{5/16 + 193/256 - 257/256}{2 \cdot MO \cdot OP_1} =$$

$$= \frac{80 - 63}{2MO \cdot OP_1} > 0 \quad (46)$$

Угол MOP_1 - острый. Остальные два угла треугольника MOP_1 - еще меньше, поэтому тоже острые.

Теперь, если (вдруг) оказалось, что $AM < AP_1$, то сдвигаем точку Q_1 влево так, чтобы стало

$$AP_1 = AM. \quad (47)$$

Тогда треугольник AMP_1 становится равнобедренным с острым углом A при вершине. Поэтому этот треугольник – остроугольный.

Аналогичную операцию проводим с вершиной Q_1 .

Алгоритм деления построен.

Замечание

Если равнобедренный треугольник - прямоугольный, то доказательство того, что его можно разделить на 7 остроугольных треугольников, в точности повторяет доказательство для равнобедренного тупоугольного треугольника, с тем лишь отличием, что $AP_1 < AM$, и потому точку P_1 сдвигать не надо. Действительно,

$$AM = a\sqrt{2} > AP_1 = a + a/8 = 9a/8, \quad (48)$$

Так как

$$2 > 81/64. \quad (49)$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2

Любой неравнобедренный прямоугольный треугольник делится медианой, проведенной из вершины прямого угла на два треугольника: равнобедренный тупоугольный и равнобедренный остроугольный (рис. 9).

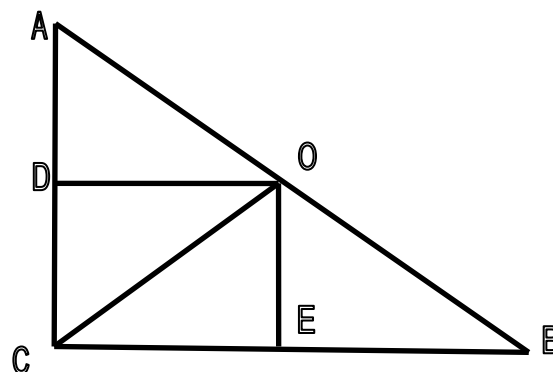


Рисунок 9 – Неравнобедренный прямоугольный треугольник

Действительно, проведя две средних линии и соединив точки C и O , получим 4 равных прямоугольных треугольника, гипотенузы которых равны. Поэтому $AO = CO$, $CO = BO$, треугольники AOC , COB - равнобедренные, причем один из них остроугольный. Поэтому второй – остроугольный.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3

Любой треугольник делится на 2 прямоугольных треугольника.

Действительно, проведя из вершины против большей стороны высоту BH , получаются два прямоугольных треугольника ABH и CBH (рис. 10).

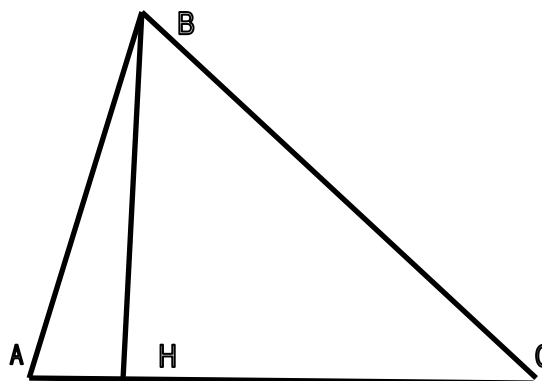


Рисунок 10 – Иллюстрация доказательства
леммы 3

Лемма 3 доказана.

Из лемм 1,2,3 следует теорема 2. Теорема 2 доказана.

Теорема 3

Любой треугольник можно разделить на 9 выпуклых пятиугольников (рис. 11).

Доказательство

По определению, выпуклая фигура – такая, которая лежит целиком по одну сторону от любой своей стороны.

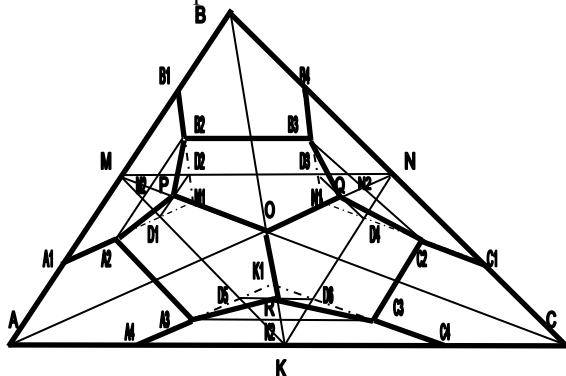


Рисунок 11 – Иллюстрация доказательства
теоремы 3

Пусть AN, BK, CM – медианы треугольника ABC; MK, NK, MN – средние линии. Пусть A1 – середина AM, M1 – середина MO, поэтому $A1M1 \parallel AO$. Пусть B1 – середина BM, A4 – середина AK, K1 – середина OK. Тогда $A4K1 \parallel AO$. Значит $A1M1 \parallel A4K1$.

Пусть C1 – середина CN, C4 – середина KC; K1 – середина OK, N1 – середина ON. Тогда $K1C4 \parallel OC$, $N1C1 \parallel OC$.

Пусть, $D2 = B1M1 \cap MN$;
 $P = MO \cap D1D2$. Тогда $D1D2 \parallel AB$.

Пусть A2 – середина A1D1, B2 – середина B1D2. Тогда $A2B2 \parallel AB$. Пятиугольник $A1A2PB2B1$ – выпуклый.

Пусть $D3 = MN \cap B4N1$,
 $D4 = C1N1 \cap ON$, $Q = ON \cap D3D4$.

Пусть B3 – середина B4D3, C2 – середина D4C1. Тогда пятиугольник $B4B3QD4C2C1$ – выпуклый.

Пусть $D5 = A4K1 \cap MK$,
 $D6 = K1C4 \cap NK$, $R = OK \cap D5D6$.

Пусть A3 – середина MD5, C3 – середина C4D6. Тогда $K2 = K1K \cap A3A4$ – середина RK. Пятиугольник $MA3RC3C4$ – выпуклый.

Три угловых пятиугольника имеют по две равных параллельных стороны – выпуклые. Три пятиугольника с центром в точке O – тоже выпуклы.

Теорема доказана.

Замечание. Если выбросить обозначения вершин, то получается рисунок 12.

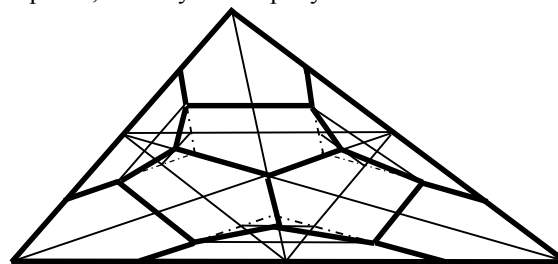


Рисунок 12 – Разделение на выпуклые
пятиугольники без обозначения вершин

Литература

1. Свентковский В. А. Математика и ее приложения. Выпуск 1. "Некоторые задачи и проблемы комбинаторной геометрии", Санкт Петербург, 2008.
2. Свентковский В. А. О построении плоских выпуклых K-угольников, которые можно разделить на n любых заданных равных прямоугольных треугольников. Сборник материалов VIII международной научно-технической конференции 25 мая 2017 ДонНТУ Донецк
3. Бухштаб А. А. Теория чисел. Санкт-Петербург. Изд-во Лань, 2015.
4. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел.
5. Манин Ю. И. Введение в современную теорию чисел. Москва. Изд-во МЦНМО, 2013.
6. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. Учпедгиз - 1959.
7. Яглом И. М. О комбинаторной геометрии. Москва. Изд-во Едиториал, 2004.
8. Яглом И. М. Как разрезать квадрат? М: КомКнига, 2006.
9. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Разбиение фигур на меньшие части. Москва, Изд-во Наука, 1971.
10. Александро И. И. Сборник геометрических задач на построение. Москва, Учпедгиз, 1959.
11. Гордин Р., Шарыгин И. Сборник задач по геометрии. Изд-во "АСТ", "Астрель", 2001.
12. Шарыгин Г. И. Лекции по элементарной геометрии. Москва, Изд-во МЦНМО, 2014.

Свентковский В. А. Три задачи по геометрии на тему: «Разделение треугольника на части с заданными свойствами». Приводится доказательство того, что треугольник с рациональными сторонами можно разбить на 2 треугольника с рациональными сторонами неограниченным числом способов. Строится соответствующий алгоритм. Дается четкий алгоритм разделения треугольника на 9 выпуклых пятиугольников. Доказывается, что тупоугольный или прямоугольный треугольник разделяется на остроугольные треугольники. Строится соответствующий алгоритм.

Ключевые слова: треугольник, пятиугольник, части, рациональные стороны, заданные свойства.

Smentkowski V. A. Three problems on geometry on the theme: «Splitting a triangle into parts with desired properties». The proof that a triangle with rational sides can be divided into 2 triangles with rational sides unlimited number of ways. Built matching algorithm. Provides a clear separation algorithm of the triangle is 9 convex pentagons. It is proved that obtuse or right triangle is divided into acute triangles. Built matching algorithm.

Keywords: triangle, pentagon, parts, the rational part, the desired properties.

Статья поступила в редакцию 21 мая 2018 г.
Рекомендована к публикации профессором Шелеповым В. Ю.